

Peter Werth
De Divina Proportione
oder
Über die fünf Platonischen Körper

*Herrn Prof. Dr. J. A. Schmoll genannt Eisenwerth
zum 90. Geburtstag gewidmet*

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Die Geometrie der Platonischen und Archimedischen Körper

- Die Euklidischen Definitionen für die Platonischen Körper
- Die Platonischen Körper und ihre ein- und umbeschriebenen Sphären
- Die polaren Beziehungen der Platonischen Körper untereinander
- Die regulären Polyeder und ihre Symmetrien
- Die Archimedischen Körper
- Die vier konvexen Kepler-Poinsot-Körper

Regelmäßige Körper in frühgeschichtlichen Kulturen

- Die nordschottischen „carved stone balls“
- Die Funde aus der La-Tène-Zeit

Die regulären Körper in der Antike

- Ihre Bedeutung bei den Pythagoreern
- Platos Elementenlehre
- Die gallo-römischen Knopf-Dodekaeder

Die Platonischen Körper bei Euklid und seinen Nachfolgern

Die Platonischen Körper in der Renaissance

- Die Platonischen Körper bei Piero della Francesca
- Fra Luca Pacioli und sein Buch *De Divina Proportione*
- Albrecht Dürer und Fra Luca Pacioli
- Abbildungen auf Gemälden und in Büchern

Die Keplersche Weltenharmonie

- Das Keplersche Planetensystem
- Keplers astrologische Folgerungen

Die Platonischen Körper in der Mineralogie

- Kristalle und ihre Klassifizierung
- Die Goldkristallisationen von Berkeley

Literaturverzeichnis

Abbildungsnachweis

Die Bedeutung der Geometrie beruht nicht auf ihrem praktischen Nutzen, sondern darauf, daß sie ewige und unwandelbare Gegenstände untersucht und danach strebt, die Seele zur Wahrheit zu erheben.

Plato

Vorbemerkung

Die fünf Platonischen Körper scheinen in ihrer Klarheit, strengen Schönheit und der geheimnisvollen Vielfalt ihrer Zahleneigenschaften aus sich heraus und für sich zu bestehen und der menschlichen Betrachtung überhaupt nicht zu bedürfen. Kein Mensch hat sie je in ihrer Vollkommenheit zu Gesicht bekommen.

Jahrtausende hindurch konnte nur die Sprache der Mathematik, der abstraktesten Geisteswissenschaft überhaupt, ihre geometrischen und symmetrischen Eigenschaften beschreiben. Den Pythagoreern galten sie als geheiligte Ideen, in denen sich der Kosmos in seinen einzelnen Bestandteilen ebenso wie als Ganzes abbildet. Plato wählte sie, um die Struktur unserer Welt im Mikrokosmos der Elemente auszudrücken. Kepler sah durch sie den Makrokosmos unseres Sonnen- und Planetensystems geordnet.

Frühsteinzeitliche Völker im Norden Schottlands haben bereits ihre Symmetrien gekannt und symbolisch in fast kugelförmigen, steinernen Gebilden, den „carved stone balls“, ausgedrückt. Kundige Druiden reichten ihr Wissen nach Süden, nach Magna Graecia zu den Pythagoreern weiter. Diese wählten erstmals die uns geläufigen kristallinen Gebilde, um sie anschaulich sichtbar werden zu lassen. Seitdem bemühten sich die Mathematiker Jahrhunderte hindurch, ihre Gesetzmäßigkeiten und ihre Zahlenverhältnisse zu verstehen - zunächst mit den Mitteln der Geometrie, wie sie Euklid begründet hatte, dann mit den Mitteln der Algebra, die im frühen Mittelalter arabische Wissenschaftler das Abendland gelehrt hatten.

Ihre Symmetrieeigenschaften inspirierten seit Descartes zu neuen mathematischen Disziplinen, die im 19. Jahrhundert durch Poincaré und andere in der sogenannten „Gruppentheorie“ ihre Vollendung fanden. Die moderne Feldtheorie und Elementarteilchenphysik, die die physikalisch erfäßbare Realität nur noch durch die Symmetrieeigenschaften des Raumes, der Teilchen und Felder beschreiben, wären ohne diese Gruppentheorie nicht denkbar.

Erst als die bildenden Künste der Renaissance, u.a. durch die geometrischen Arbeiten des Piero della Francesca, die neuen Gesetze der Perspektive für sich entdeckt hatten, konnte die Schönheit der stereometrischen Platonischen Körper auch in der Ebene, also auf Zeichnungen und Gemälden, anschaulich und überzeugend vor Augen gebracht werden. Die Größten ihrer Zeit widmeten sich mit Hingabe dieser Aufgabe: Leonardo da Vinci zeichnete die Illustrationen für die mathematischen Abhandlungen des Fra Luca Pacioli, bei dem Albrecht Dürer sich während seiner zweiten Italienreise in der Kunst der Perspektive unterweisen ließ.

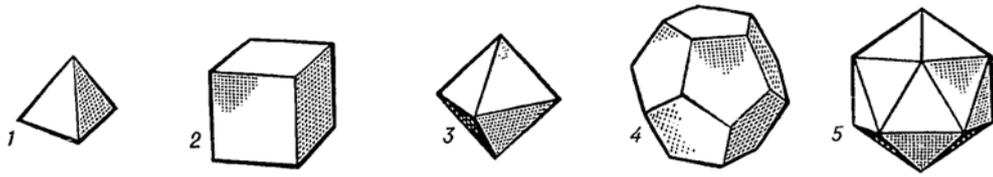
Die Verliebtheit des Manierismus in raffinierte Bildaufbauten brachte wundervolle perspektivische Darstellungen auf Tafelbildern und in Lehr- und Musterbüchern für Kunsthandwerker hervor. Unübersehbar ist aber, daß über die deutlich spürbare Freude, die „bella difficultà“ der Perspektive überwunden zu haben, der Sinngehalt der Platonischen Körper mehr und mehr in den Hintergrund trat.

Erst der studierte Theologe, Mathematiker und Astronom Johannes Kepler besann sich im frühen 17. Jahrhundert wieder auf die altherwürdigen Sinnzusammenhänge und fand bei seinen interdisziplinären Forschungen im Makrokosmos der Gestirne die Gesetzmäßigkeiten, die auch heute noch im Mikrokosmos der „klassischen“ Atomphysik ihre Gültigkeit besitzen.

Gewidmet ist dieser Beitrag einem Wissenschaftler, der die Geschichte der Kunst nicht als ein isoliertes ästhetisches Phänomen versteht, sondern interdisziplinäre Forschung betreibt und dessen Interesse den Bezügen der Kunst zu den Natur- und Geisteswissenschaften gilt.

Die Geometrie der Platonischen und Archimedischen Körper

Die Euklidischen Definitionen für die Platonischen Körper



Die fünf Platonischen Körper:

1. Tetraeder, 2. Würfel, 3. Oktaeder, 4. Pentagondodekaeder, 5. Ikosaeder

Die spezifischen Eigenschaften der „Platonischen Körper“ – sie werden in der Geometrie und Algebra auch als „reguläre Polyeder“ oder „regelmäßige Vielfache“ bezeichnet – werden durch drei einfache Kriterien erfüllt, die bereits Euklid in knappster Form im 13. Buch seiner *Elemente* auführt:¹

- (1) Sie sind sogenannte „konvexe“ Polyeder, d.h. ihre räumlichen Ecken zeigen sämtlich „nach außen“.
- (2) In jeder Ecke eines Polyeders treffen jeweils gleich viele Seitenflächen bzw. Kanten zusammen.
- (3) Ihre seitlichen Begrenzungsflächen sind regelmäßige Vielecke, die bei jedem Polyeder von gleicher Form sein müssen.

Aus diesen Kriterien läßt sich ableiten, daß es genau fünf Typen von „Platonischen Körpern“ geben kann, und nicht mehr.² Es sind dieses die folgenden:

Tetraeder (= Vierflach)	mit 4 Flächen	4 Ecken	6 Kanten
Hexaeder (= Sechsfach oder Würfel)	mit 6 Flächen	8 Ecken	12 Kanten
Oktaeder (= Achtfach)	mit 8 Flächen	6 Ecken	12 Kanten
Pentagondodekaeder (= Zwölfach)	mit 12 Flächen	20 Ecken	30 Kanten
Ikosaeder (= Zwanzigflächner)	mit 20 Flächen	12 Ecken	30 Kanten

¹ Einzelheiten können u.a. der folgenden Literatur entnommen werden: Adam/Wyss: Platonische und Archimedische Körper, Lexikon der Mathematik,

² Auch dieser Beweis wurde bereits durch Euklid geführt: Da in jedem Eckpunkt eines solchen Polyeders die Summe der Winkelmaße der anliegenden Seitenflächenecken kleiner als 360° (und damit jeder Winkel einer anliegenden Seitenflächenecke kleiner als 120°) sein muß, kommen als Seitenflächen nur gleichseitige Drei-, Vier- und Fünfecke in Frage, deren Innenwinkel die Maße von 60° , 90° und 108° haben. Hieraus folgt, daß an der Ecke eines regulären Polyeders nur

- drei, vier bzw. fünf regelmäßige Dreiecke,
- drei Quadrate oder
- drei regelmäßige Fünfecke

zusammentreffen können. Somit gibt es genau fünf Typen von regulären Polyedern.

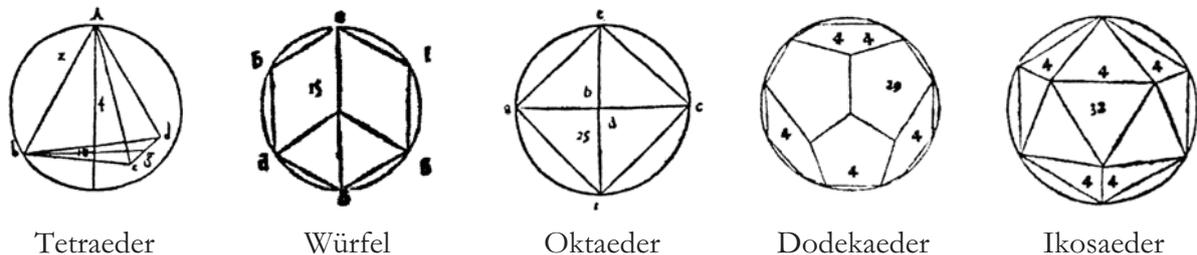
Die Platonischen Körper und ihre ein- und umbeschriebenen Sphären

Diese fünf Polyeder besitzen bezüglich ihrer sogenannten „Mittelpunkte“ bemerkenswerte gemeinsame Eigenschaften:

Errichtet man auf dem Mittelpunkt einer jeden Seitenflächen je eine Senkrechte, die in das Innere des Polyeders führt, so schneiden sich diese Senkrechten in einem einzigen Punkt, dem „Mittelpunkt“ des Polyeders. Die Mittelpunkte der Seitenflächen haben alle denselben Abstand vom Mittelpunkte des Polyeders.

Es läßt sich daher einem jeden Polyeder eine Kugel einbeschreiben, deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt des Polyeders ist, und die jeweils die Seitenflächen des Polyeders in ihren Seitenmittelpunkten (sozusagen von „innen“ her) berührt; sie heißt die „einbeschriebene Sphäre“ oder die „Inkugel“ des Polyeders.

Ebenso haben die Eckpunkte des Polyeders alle denselben Abstand vom Mittelpunkte des Polyeders; dieser Abstand ist naturgemäß größer als die Abstände der Seitenmittelpunkte. Es läßt sich daher ein jedes Polyeder von einer Kugel umschließen, die wieder denselben Mittelpunkt hat wie die „Inkugel“ und mit ihrer Hülle jetzt aber eine jede Polyederecke (sozusagen von „außen“ her) berührt; sie heißt die „umbeschriebene Sphäre“ oder die „Umkugel“.



Die Platonischen Körper mit ihren Umkugeln nach Piero della Francesca³

Die polaren Beziehungen der Platonischen Körper untereinander

Vier von den Platonischen Körpern, nämlich der Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder, sind einander paarweise zugeordnet. Sie lassen sich durch geometrische Konstruktion ineinander überführen:

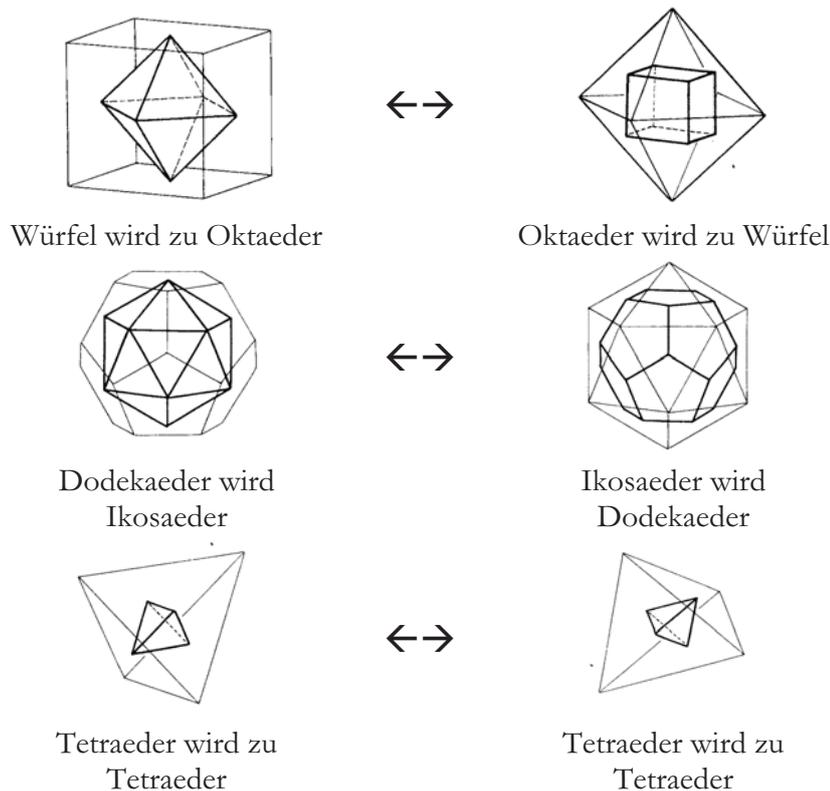
Verbindet man sämtliche Seitenmittelpunkte eines Platonischen Körpers mit den Seitenmittelpunkten der jeweils benachbarten Seitenflächen, so bilden die Verbindungslinien die Kanten von neu entstehenden Polyedern. Diese besitzen ebenso viele Eckpunkte wie der ursprüngliche Polyeder Flächen hat, und ebenso viele Flächen, wie der ursprüngliche Polyeder Ecken besitzt.

³ Abb. aus: Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*.

Diese neu entstehenden Polyeder sind wiederum Platonische Körper. Sie werden als die „polaren Polyeder“ der ursprünglichen Polyeder bezeichnet.

Auch der fünfte Körper, das Tetraeder, besitzt eine ähnliche Eigenschaft. Sein polarer Polyeder ist jedoch wiederum ein Tetraeder.

Durch diese Konstruktionen entstehen die folgenden drei Gruppen von einander „polar zugeordneten“ Platonischen Körpern:



Die regulären Polyeder und ihre Symmetrien

Anstatt die Ecken, Kanten und Seitenflächen von Polyedern zu zählen und zueinander in Beziehung zu setzen, ging die Mathematik ab der Mitte des 19. Jahrhunderts dazu über, vor allem die Symmetrieeigenschaften der Körper zu untersuchen. Man bestimmte die Art und Anzahl der sogenannten „Transformationen“, die es erlauben, einen jeden Körper derart zu drehen und zu spiegeln, daß der so behandelte Körper wieder genau so aussieht wie vor diesen Aktionen.⁴

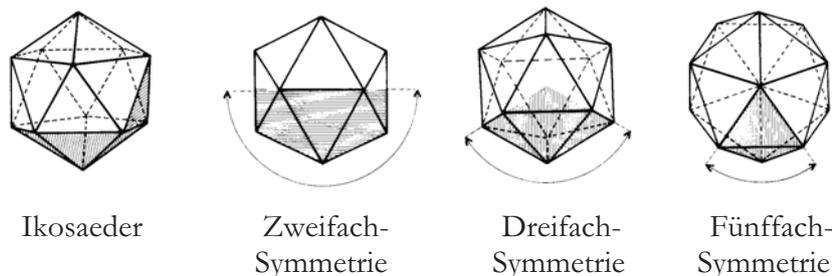
⁴ Diese mathematische Richtung, die sogenannte „Gruppentheorie“ wurde von Poincaré begründet und nach ihm von Cauchy weiterentwickelt. Sie bewährte sich sowohl in klassischen naturwissenschaftlichen Disziplinen wie z.B. der Kristallographie als auch in der modernen Physik der Elementarteilchen.

Die Platonischen Körper lassen sich dann nach der Anzahl ihrer Symmetrien klassifizieren:⁵

- das Tetraeder hat Zwei- und Dreifach-Symmetrien,
- der Würfel hat Zwei-, Drei- und Vierfach-Symmetrien,
- das Oktaeder hat Zwei-, Drei- und Vierfach-Symmetrien,
- das Ikosaeder hat Zwei-, Drei- und Fünffach-Symmetrien,
- das Pentagondodekaeder hat Zwei-, Drei- und Fünffach-Symmetrien.

Aus dieser Aufstellung ist zu erkennen, daß aufgrund ihrer identischen Symmetrieeigenschaften Würfel und Oktaeder bzw. Ikosaeder und Pentagondodekaeder zu jeweils derselben Symmetrieklasse gehören, das Tetraeder aber eine eigene Symmetrieklasse bildet.

Das folgende Bild soll als Beispiel die drei Symmetrieklassen des Ikosaeders schematisch aufzeigen:



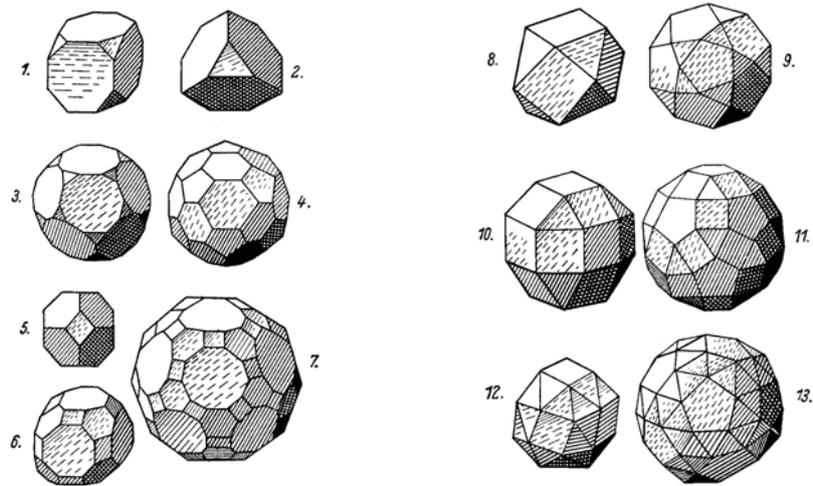
Die Archimedischen Körper

Außer den fünf „regulären Polyedern“ oder „Platonischen Körpern“ kennt die Geometrie noch dreizehn „halbreguläre Polyeder“ oder „Archimedische Körper“. Die Bedingungen, die sie erfüllen müssen, leitete Archimedes (ca. 287-212 v.Chr.) aus den Kriterien für die Platonischen Körper dadurch ab, daß er das letzte Kriterium nicht so streng faßte wie für diese:

- (1) Sie sind „konvexe“ Polyeder, d.h. ihre räumlichen Ecken zeigen sämtlich „nach außen“.
- (2) In jeder Ecke eines Polyeders treffen gleich viele Seitenflächen bzw. Kanten zusammen.
- (3) Ihre seitlichen Begrenzungsflächen sind regelmäßige Vielecke, dürfen aber bei jedem Polyeder zwei oder auch drei unterschiedliche Formen aufweisen.

Ihre Eigenschaften werden im folgenden nicht weiter behandelt.

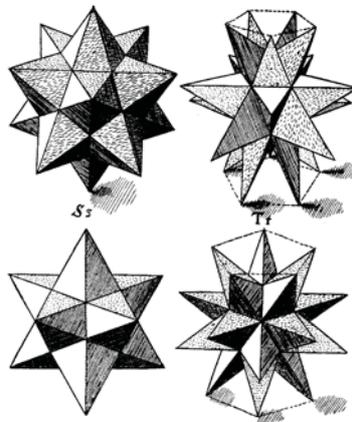
⁵ Der Einfachheit halber werden hier die Anzahl der jeweiligen Mehrfach-Symmetrien sowie die Anzahl der jeweils möglichen Spiegelungen nicht behandelt.



Die dreizehn Archimedischen Körper⁶

Die vier nichtkonvexen Kepler-Poinsot-Körper

Aus zweien der Platonischen Körper, nämlich aus Pentagondodekaeder und Ikosaeder, hat Johannes Kepler (in seiner *Weltharmonik* 1619)⁷ zwei weitere Körper geometrisch abgeleitet, deren Oberflächen nicht ausschließlich konvexe Winkel besitzen, sondern pyramidenartige Strukturen aufweisen, die sogenannten „Sternpolyeder“.



Die zwei Keplerschen Sternpolyeder
in jeweils zwei Ansichten

Den linken Körper konstruierte Kepler dadurch, daß er sämtliche Kantenlinien eines Pentagondodekaeders über die Eckpunkte des Körpers hinaus verlängerte, bis sich jeweils fünf Linien in einem Punkt treffen. So entsteht ein sternförmiges Gebilde mit insgesamt zwölf fünfseitigen Pyramiden auf den Dodekaederseiten.

Wie die Platonischen und Archimedischen Körper war auch dieser Zwölfstern schon lange vor Kepler bekannt. Er findet sich häufig in der dekorativen Kunst,

⁶ Abb. aus: Kepler, *Weltharmonik*, II. Buch, XXVIII. Satz.

⁷ Kepler, *Weltharmonik*, Abbildung S. 74, geometrische Besprechung S. 77.

wie hier zum Beispiel als Steineinlegearbeit im Fußboden von San Marco in Venedig.⁸



Der Zwölfstern in San Marco

Der französische Mathematiker und Mechaniker Louis Poinsot (1777-1859), der bis 1809 Mathematik am Lycée Bonaparte in Paris unterrichtete, wurde nach einer aufsehenerregenden Veröffentlichung über Polygone und Polyeder als Professor für Analysis und Mechanik an die École Polytechnique berufen. Hier entwickelte er zunächst eine abstrakte Theorie der Sternpolyeder und entdeckte dabei (zusätzlich zu den Keplerschen) zwei weitere solche Körper, die sogen. „Kepler-Poinsot-Sternpolyeder“. Sie werden im folgenden nicht weiter behandelt.

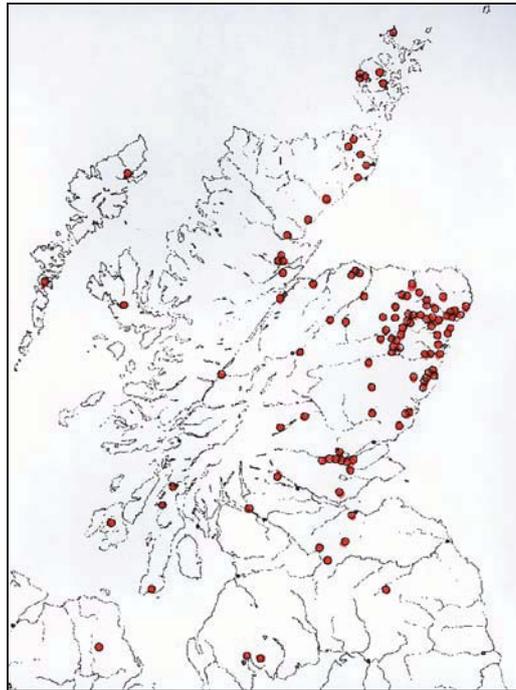
Im Zuge dieser Arbeiten schuf er die Grundlage für die moderne Gruppentheorie, die sich ganz allgemein mit Symmetrieeigenschaften von mehrdimensionalen Körpern befaßt, und die in ihrer weiterentwickelten Form große Bedeutung für die moderne Elementarteilchenphysik und die Feldtheorie gelangen sollte.

⁸ Der Entwurf dazu wird Paolo Uccello (1397-1475) zugeschrieben.

Regelmäßige Körper in frühgeschichtlichen Kulturen

Die nordschottischen „carved stone balls“

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entdeckten Archäologen in Nordschottland Hunderte von etwa faustgroßen Steinobjekten, deren rundliche Formen auffallend eingekerbt sind. Sie werden ins Neolithikum (5000 bis 2500 v.Chr.) datiert. Ihre Zweckbestimmung ist bis heute noch ungeklärt.⁹



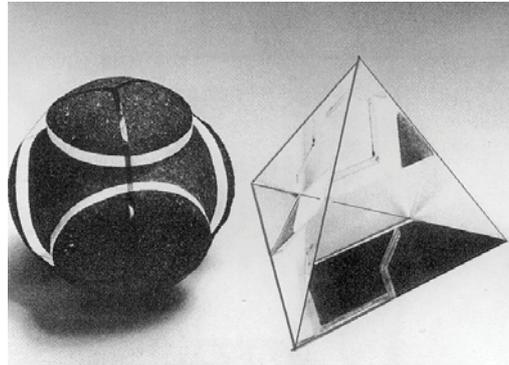
Die Fundstellen der Steinobjekte
in Nordschottland

Die meisten dieser Objekte bestehen aus Granit. Ein Handwerker wird für die Anfertigung eines solchen Steines mit den damaligen (Stein-)Werkzeugen einige Monate benötigt haben. Man hat ihnen zu ihrer Entstehungszeit sicher eine gewisse, vielleicht sogar kultische, Bedeutung beigemessen. Wenn die einzelnen Objekte sich auch im Detail unterscheiden, so lassen sich doch neun verschiedene Typen von Kerbungen bestimmen. Erst in den letzten Jahren hat man begonnen, sie auf ihre Symmetrieeigenschaften, und damit auf ihre geometrisch-mathematische Charakteristik hin zu untersuchen:

- (1) Fünf Arten von Kerbungen lassen sich mit den Symmetrieeigenschaften der klassischen Platonischen Körper gleichsetzen.
- (2) Je zwei weitere entsprechen den Symmetrien eines Archimedischen und seines polaren Körpers.
- (3) Bei den restlichen Steinobjekten ist die Art ihrer Kerbungen nicht deutlich sichtbar, sei es durch Beschädigungen oder altersbedingte Veränderungen der Oberflächen.

⁹ Die folgende Darstellung nach: Critchlow, Time Stands Still. Diese Arbeit bringt eine Fülle von Details zum astronomisch-mathematischen Wissen der steinzeitlichen Kulturen, gerät aber vielfach in Spekulationen und bringt bedauerlicherweise kaum einen Quellennachweis.

Der Bezug zu den Platonischen Körpern wird sichtbar, wenn man die rundlichen Erhebungen der Steinobjekte mit den kristallinen Ecken der „klassischen“ regulären Polyeder gleichsetzt, und deren gedachte gebogene Verbindungslinien mit den „klassischen“ geradlinigen Kanten. Im folgenden Bild umgeben die hellen Markierungsbänder die „Ecken“ eines Tetraeders, während die dunklen Bänder die „Kanten“ eines Tetraeders markieren.



Die tetraedrische Struktur eines „carved stone balls“

Interpretiert man jedoch umgekehrt die Kerbungen als „Polyederkanten“, so stellen die Erhebungen die Mittelpunkte der hier gewölbten „Polyederflächen“ dar.



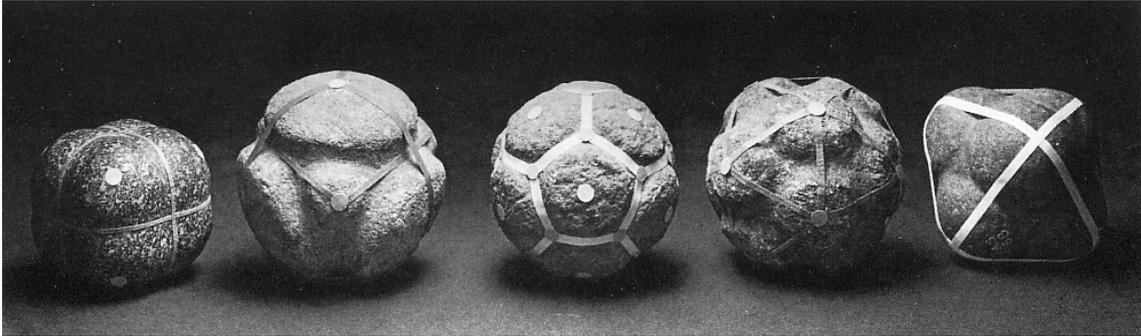
Die dodekaedrische Struktur eines „carved stone ball“

Manche dieser tetraedrischen Steine sind mit derart aufwendigen Gravuren versehen, daß die Vermutung von kultischer Bedeutung nicht von der Hand zu weisen ist.



Reich verzierter „Tetraeder“

Die Sammlung des Ashmolean Museum in Oxford besitzt einen vollständigen Satz von Steinen, die den fünf Platonischen Körpern entsprechen.

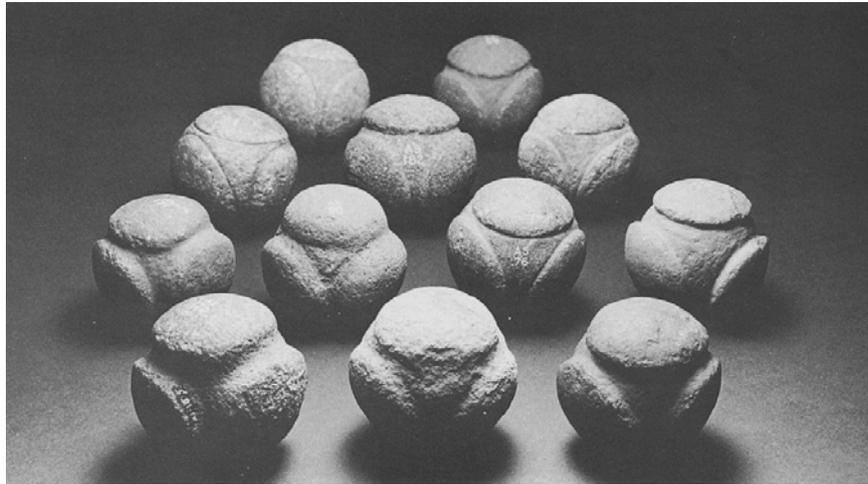


Die „carved stone balls“ im Ashmolean Museum in Oxford

Von links nach rechts könnten die abgebildeten Objekte wie folgt interpretiert werden:

- (1) Das Objekt besitzt die Struktur eines Würfels, bei dem die eingekerbten Linien wie „Meridiane“ die Mittelpunkte der Würfelseiten mit einander verbinden und damit die Struktur eines eingeschriebenen Oktaeders nachzeichnen.
- (2) Das Objekt besitzt die Struktur eines Tetraeders, dem sein polarer Tetraeder eingeschrieben ist. Die „Eckpunkte“ auf den großen Erhebungen entsprechen den Eckpunkten des primären Tetraeders, die auf den kleinen Erhebungen denen des eingeschriebenen Tetraeders.
- (3) Das Objekt besitzt von den Erhebungen her die Struktur eines Ikosaeders. Die Kerben schneiden sich jeweils in den Mittelpunkten der dreiseitigen Seitenflächen und bestimmen so die Konturen des eingeschriebenen polaren Pentagondodekaeders.
- (4) Dieses Objekt entspricht dem vorhergehenden, ist aber mehr der Kugelform angenähert; es ist genauso wie dieses zu interpretieren. Auf der Abbildung sind hier die Verbindungslinien der „Eckpunkte“ markiert.
- (5) Das Objekt besitzt die Struktur eines Oktaeders. Die eingekerbten Linien zeichnen die „Kanten“ eines eingeschriebenen polaren Würfels nach.

Von den etwa 300 aufgefundenen „carved stone balls“ weist bei weitem die Mehrzahl oktaedrische Symmetrieeigenschaften auf.



Eine Gruppe von „tetraedrischen“ carved stone balls

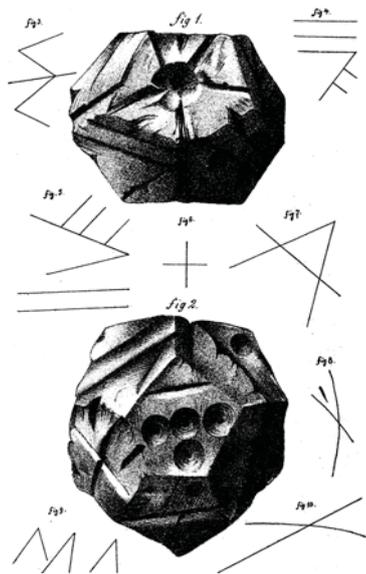
Aus den Untersuchungen der „carved stone balls“ läßt sich zur Zeit kaum auf bemerkenswerte mathematische Kenntnisse bei den frühen Bewohnern Nordenglands schließen, wenn wir unter „mathematisch“ die heute übliche, von Zahlen und Algorithmen bestimmte Ausprägung dieser Wissenschaft verstehen. Faßt man jedoch den Begriff der Mathematik weiter, etwa im Sinne der modernen Gruppentheorie oder der Topologie, so ist ein hochentwickeltes Bewußtsein für geometrische Symmetrieeigenschaften und für topologische Relationen zwischen Erhebungen und Einkerbungen auf den besprochenen fast kugelförmigen Steinobjekten unübersehbar.¹⁰ Daß dieses Bewußtsein keinesfalls als diffus oder als nur-ästhetisch eingestuft werden darf, zeigt die erstaunliche Tatsache, daß die Symmetrieeigenschaften der guterhaltenen (und damit zweifelsfrei interpretierbaren) „carved stone balls“ mit denen der klassischen Platonischen Körper exakt übereinstimmen.

¹⁰ Ähnliches wird auch aus den bei weitem noch nicht abgeschlossenen Untersuchungen von Steinsetzungen in Nordschottland ersichtlich. Die astronomischen Bezüge, die in der Bretagne, in der Normandie und in Südeuropa erwiesen sind, haben sich bisher nur ansatzweise bestätigen lassen.

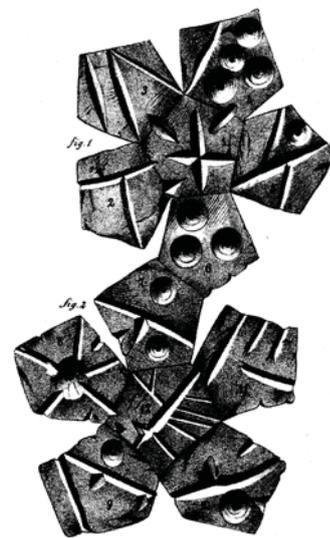
Die Funde aus der La-Tène-Zeit

Eine Reihe von archäologischen Polyederfunden entstammen der La-Tène-Zeit Mitteleuropas und sind wesentlich jünger als die soeben besprochenen. Lindemann stellte sie erstmals 1896 in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften der Öffentlichkeit vor.¹¹ Er berichtete über in Bronze gegossene oder aus Stein bzw. Keramik gefertigte Polyeder, die in schweizer, norditalienischen und keltisch beeinflussten Gebieten gefunden wurden. Allein dreißig besitzen die Form eines Pentagondodekaeders, die meisten von ihnen sind hohl und von handlicher Größe; einer hat die Form eines Ikosaeders.

Lindemann vermutet, daß ihre Formen von den Kristallisationsformen des Pyrits inspiriert sind: Pyrit oder Schwefelkies, ein goldartig glänzendes Eisenmineral, kristallisiert, außer in der allgemein bekannten Würfelform, als Dodekaeder und Ikosaeder, allerdings nur in Elba und in den südlichen nach Piemont ausmündenden Alpentälern (besonders Traversella und Brosso). Entsprechend stammen die archäologischen Funde vor allem aus Norditalien sowie dem ehemaligen Gallien. Wenn man erwägt, daß in diesen Regionen die Eisenverhüttung und –weiterverarbeitung sehr früh in hoher Blüte stand (La-Tène-Kultur), so wundert es nicht, wenn diesen auffallenden Kristallisationen des hochgeschätzten Eisenerzes, sowohl wegen ihrer klaren Formen, aber auch wegen der goldenen Leuchtkraft, Verehrung entgegengebracht wurde.¹²



Das Dodekaeder vom Monte Loffa



Das Dodekaeder vom Monte Loffa
Abwicklung der Seitenflächen

¹¹ Die folgende Darstellung nach Lindemann, Zur Geschichte der Polyeder.

¹² Lindemann, Zur Geschichte der Polyeder, § 18. S. 725 ff.

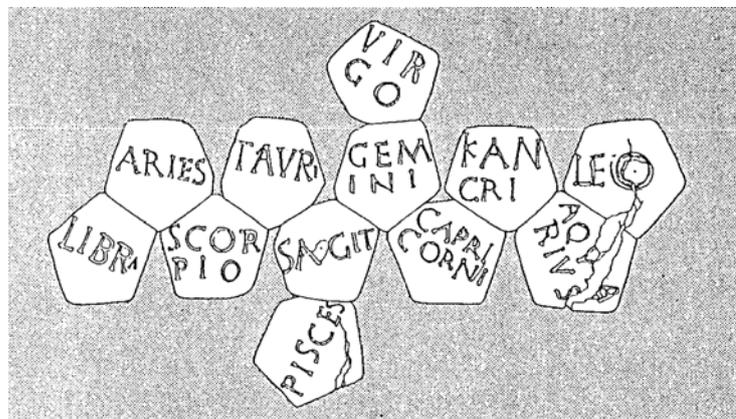
Besonders ausführlich befaßt sich Lindemann mit einem Dodekaeder aus Speckstein, das 1885 in einer prähistorischen Siedlung am Monte Loffa (Oberitalien) ausgegraben wurde und dem er schon aufgrund der Fundsituation ein bemerkenswert hohes Alter zuspricht. Zunächst wurde das Dodekaeder als eine Art von Spielwürfel angesehen. Nach sorgfältigeren Untersuchungen der außen eingravierten Kerben unterschiedlicher Form und der sehr präzise kreisförmig angelegten kleinen Höhlungen¹³ tendiert man heute dahin, in diesem Dodekaeder ein Objekt mit kultischer Bedeutung, eventuell für Orakelzwecke, zu sehen. Durch Vergleich der Kerben und Bohrungen mit phönikischen und altitalischen Zahlzeichen und –notationen datierte Lindemann das Dodekaeder in die Anfänge der Eisenzeit, also in die Zeit von 1000 oder 900 v. Chr.

Ein aus glasierter Keramik hergestelltes Ikosaeder im Turiner Museum, offensichtlich nicht ganz so alt, kennt Lindemann lediglich aus einem schriftlichen Bericht.¹⁴ Es soll auf den Seitenflächen mit unterschiedlichen griechischen Buchstaben bedeckt gewesen sein, die jedoch nicht im Detail benannt wurden. Bedauerlicherweise untersuchte Lindemann das Ikosaeder nicht näher. Der derzeitige Verbleib ist unbekannt.

Ein besonders eindrucksvolles Dodekaeder wurde im Jahre 1982 in Genf entdeckt. Es besteht aus massivem Blei und ist mit Silberblech überzogen. Jede der zwölf Seitenflächen trägt den Namen eines Tierkreiszeichens, wodurch der astronomische Bezug deutlich sichtbar wird.



Das Dodekaeder von Genf



Abwicklung des Dodekaeders

Alle diese regulären Polyeder waren lange vor den Pythagoreern bekannt. Ihre Kenntnis mag sich (teilweise über etruskische Überlieferungen) sowohl in die nördlichen Kulturkreise, in denen vor allem das Dodekaeder lange noch in Gebrauch war, als auch in südliche Richtung auf „Magna Graecia“ hin verbreitet haben.

¹³ Vier Seitenflächen mit je einer Mulde, je eine Seitenfläche mit zwei, drei und vier Mulden.

¹⁴ Lindemann, Zur Geschichte der Polyeder, § 5. S. 641 f.

Die regulären Körper in der Antike

Ihre Bedeutung bei den Pythagoreern

Die „regulären Polyeder“ wurden zwar in der Antike allgemein „Platonische Körper“ genannt, jedoch wußten die damaligen Gelehrten, daß sie bereits lange vor Plato den Pythagoreern und dem Mathematiker Theaetet (ca. 410-369 v.Chr.) bekannt waren. In einem Scholion¹⁵ zum dreizehnten Buch der *Elemente* von Euklid wird dazu folgendes gesagt:¹⁶

*In diesem Buch . . . werden die fünf sogenannten Platonischen Körper konstruiert, die aber nicht von Platon herrühren, denn drei der genannten fünf Körper, nämlich der Würfel, die Pyramide und das Dodekaeder, stammen von den Pythagoreern, das Oktaeder und das Ikosaeder aber von Theaetet. Sie werden nach Platon benannt, weil er sie im „Timaios“ nennt.*¹⁷

Mit „Pythagoreern“ sind hier die religiös bestimmten Bruderschaften gemeint, die die Anhänger des Pythagoras im 5. Jahrhundert v.Chr. hauptsächlich in Magna Graecia, also in Süditalien, gebildet hatten. Sie lebten nach den Vorschriften ihres Meisters, verehrten ihn wie einen Halbgott und schrieben ihm sogar wunderwirkende Fähigkeiten und übernatürliche Gaben zu. Der neuplatonische Mathematiker Iamblichos (ca. 250 bis ca. 330 n.Chr.) berichtete: *Von den vernünftigen Lebewesen ist die eine Art Gott, die andere Mensch, die dritte wie Pythagoras.*¹⁸ Ihre philosophischen und wissenschaftlichen Erkenntnisse trugen sie nicht in die Öffentlichkeit. Kerngedanke ihres Bildes vom Entstehen und Bestehen der Welt war das Prinzip der kosmischen Harmonien, die alles Seiende beherrschen. Hinter dem steten Wechsel der beobachteten Erscheinungen suchten die Pythagoreer das Wesen der Dinge vor allem in der Form. Und mit ausgeprägtem Schönheits- und Formensinn sahen sie in allem das waltende Gesetz, das in Größen- und Zahlenbeziehungen seinen Ausdruck findet. Die Welt als das Geordnete nannten sie „Kosmos“, die Zahl galt ihnen als das wirklich Seiende und das Wesen der Dinge. Durch Erforschung der kosmischen Harmonien wollten sie ihre Seelen reinigen und auf ihre Himmelsreise vorbereiten:

. . . da sie die Eigenschaften der harmonischen (Klänge) in den Zahlen und den Verhältnissen erblickten und es ihnen schien, daß auch alle anderen Dinge der Natur nach den Zahlen nachgebildet und die Zahlen das erste in der ganzen Natur sind, so kamen sie zu der Ansicht, die

¹⁵ = Kommentar.

¹⁶ Heiberg V. S. 654, 1-10. Dieses Scholion geht wohl auf Proklos (410-412 n.Chr.) zurück, ein Mitglied der spätantiken Platonischen Akademie, dessen Schriften sowohl Nikolaus von Kues als auch die Florentinische Akademie sowie Johannes Kepler beeinflussten.

¹⁷ Der Ausdruck „stammen“ ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß man die Körper nicht nur von der Anschauung her kannte, sondern sie auch mathematisch exakt zu konstruieren wußte. Theaetet beschrieb als Erster die exakten Konstruktionsvorschriften für sämtliche fünf Platonischen Körper. Vgl. Sachs, Platonische Körper, S. 88 ff.

¹⁸ Iamblichos, Vita Pythagorica 31.

Elemente der Zahlen seien die Elemente aller Dinge, und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.

Pythagoras (580-501 v.Chr.) selber formte die Mathematik, wie er sie von Thales von Milet (624-544 v.Chr.) und seinen Nachfolgern kennen gelernt hatte, zur „exakten“ Wissenschaft um. Er führte als erster das logische Element, den nachvollziehbaren Beweis, ein und stellte damit die allgemeinen Grundsätze und den idealen Charakter der Mathematik für alle Zeit fest.¹⁹

Wenn die Pythagoreer die exakten mathematischen Verfahren zur Konstruktion der regulären Körper auch noch nicht kannten, so waren ihnen doch die erstaunlichen Zahlen- und Maßverhältnisse ihrer Kanten, Ecken und Seitenflächen bewußt und sie fügten sie in ihr Weltbild ein. Empedokles von Agrigent (492-432 v.Chr.) lehrte als Erster, daß alles im Kosmos von den zwei Kräften Liebe und Haß und aus den vier Elementen Feuer, Erde, Wasser und Luft bestimmt sei, die ihrerseits aus kleinsten elementaren und unteilbaren Partikeln, den Atomen, bestünden. Diesen wiesen die Pythagoreer als wichtigste Eigenschaft die „Form“ zu, und zwar in Gestalt der vier regulären Polyeder: Das Feuer bestand demnach aus Tetraedern, die Erde aus Würfeln, die Luft aus Oktaedern und das Wasser aus Ikosaedern. Das Dodekaeder aber sei der elementare Bestandteil des Äthers, der das Weltganze umschließenden „äußeren“ Schicht.

Durch diese Bedeutung mag das Dodekaeder eine kultische Rolle gespielt haben. Dem entspräche der Bericht des Iamblichos von einem Geheimnisverrat: es habe nämlich einer der „Eingeweihten“ das mathematische Wissen um den Dodekaeder „solchen eröffnet, die nicht würdig waren, an den Lehren teilzuhaben“ und sei dafür von den Göttern bestraft worden:²⁰

Von Hippasos insbesondere berichten sie, er habe zwar zu den Pythagoreern gehört, da er aber erstmals schriftlich das Geheimnis der Sphäre aus zwölf Fünfecken an die Öffentlichkeit gebracht habe, sei er als Gottloser im Meer umgekommen. Der Erfinderruhm sei ihm freilich (fälschlicherweise) zuteil geworden, obwohl doch alles von „Ihm“ stammt; denn so bezeichnen sie Pythagoras und nennen ihn nicht mit Namen.

Woher die Pythagoreer die Kenntnis der regulären Polyeder hatten, ist nach wie vor nicht ganz geklärt. Die von antiken Geschichtsschreibern²¹ überlieferten Vermutungen, daß Pythagoras sie von seiner Studienreise in Ägypten und Babylon mitgebracht habe, ist zum mindesten für das Pentagondodekaeder höchst unwahrscheinlich. Das Pentagon (Fünfeck) wie auch das durch Diagonalenbildung daraus entstehende Pentagramm (Fünfstern) waren in vorpythagoreischen Zeiten weder im Zweistromland (Babylon), noch in Ägypten bekannt, auch nicht im mykenischen Kulturbereich.²² Sie müssen den Pythagoreern auf anderem Wege bekannt geworden sein. Vage Hinweise hierzu findet man bei Zeller, der eine Überlieferung zitiert, nach der Pythagoras von den „gallischen Druiden“ unterrichtet

¹⁹ Sturm, *Gesch. d. Mathematik*, S. 8 ff.

²⁰ Iamblichos, *Vita Pythagorica*, 18, 88.

²¹ z.B. Porphyrius, *De vita Pythagorae* cap. 7

²² Lindemann, *Zur Geschichte der Polyeder*, § 19. S. 731 f.

worden sei. Auch berichtet Alexander Polyhistor (Beginn des 1. Jahrhunderts v. Chr.), daß „Pythagoras von den Galliern und den Brahmanen gelernt“ habe.²³ Ähnlich vermutet Iamblichus die Quellen für pythagoreisches Wissen bei den „Kelten“ und „Iberern“.²⁴ Man scheint also die Kenntnis der regelmäßigen Körper u.a. vom Norden her vermutet zu haben. Daß frühe Kulturen in Schottland sowie in Mitteleuropa und Norditalien diesen regelmäßigen Körpern gewisse Bedeutung beimaßen, wurde im vorhergehenden Kapitel dargelegt.

Platos Elementenlehre

Plato (427-347 v.Chr.) schätzte die Mathematik, obwohl er selber kein Fachmathematiker war. Nach seiner Lehre wendet sie den Geist vom Sinnfällig-Nichtseienden zu den Ideen, dem Seienden, hin und befähigt ihn, die höchsten Ideen des Wahren, Schönen und Guten zu erfassen, was für ihn das Endziel der Philosophie ausmacht. Darum belebte Plato seine Schriften immer wieder mit Ausblicken auf mathematische Gebiete und legte seinen Schülern mathematische Probleme vor. In seiner Erkenntnistheorie spielen Mathematik und Logik als die Vorstufe der Philosophie eine zentrale Rolle. Die Führer eines Staates sollten nach seiner Meinung besondere Kenntnisse in diesen Fächern besitzen. Man müsse, *„jene, die in dem Staate an dem Größten teilhaben sollen, dazu überreden, daß sie zur Rechenkunst sich wenden.“*

Wie Plato den Aufbau der Welt (den Kosmos) sich vorstellt und welche Eigenschaften er den vier Elementen, die diese Welt bilden, zuspricht, legt er ausführlich in seinem späten Dialog „Timaios“ dar. Deutlich wird dabei seine Liebe zu schönen und geordneten Strukturen und zu klaren Zahlenverhältnissen erkennbar:

Wir müssen nun sagen, welche vier Körper wohl als die schönsten entstehen, die einander (zwar) ungleich sind, die aber, jedenfalls einige von ihnen, nach ihrer Auflösung auseinander entstehen können. Wenn wir das erreicht haben, dann sind wir im Besitz der Wahrheit über die Entstehung von Erde, Feuer und dem, was in einem entsprechenden Verhältnis in der Mitte liegt. Denn das werden wir niemandem einräumen, daß es Körper gibt, die schöner anzusehen sind als diese. ... Darum also müssen wir uns bemühen, die vier Formen an Körpern, die an Schönheit herausragen, harmonisch zusammenzufügen und zu erklären, daß wir deren Natur hinreichend erfaßt haben.²⁵

²³ Zeller I, Philosophie der Griechen, S. 386 f. u. Anm. 2.

²⁴ Iamblichos, Vita Pythagorica, 28, 151.

²⁵ Plato, Timaios (52 e).

Was bei Demokrit und Empedokles bisher die unteilbaren Atome waren, sind bei Plato nun gewisse Urstrukturen in Form von zwei Klassen rechtwinkliger Dreiecke:

- (1) Dreiecke mit den Innenwinkeln 90° , 60° und 30° , aus denen sich ein gleichseitiges Dreieck bilden läßt.

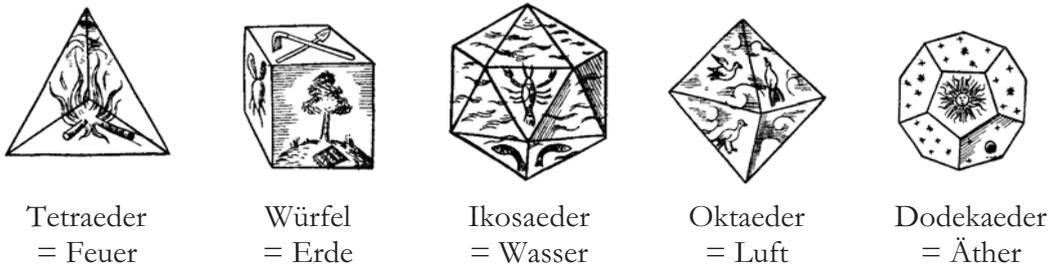


- (2) Dreiecke mit den Innenwinkeln 90° , 45° und 45° , aus denen sich ein Quadrat bilden läßt.



Aus den gleichseitigen Dreiecken (1) bilden sich die elementaren Bestandteile der drei Elemente Feuer, Luft und Wasser, aus den Quadraten (2) ergibt sich das Element Erde:

- (1) die vier Dreiecksflächen des Tetraeders formen den Urbaustein des Feuerelementes,
- (2) die sechs Quadratflächen des Würfels (die sich aus insgesamt vierundzwanzig rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen) formen den Urbaustein des Erdenelementes,
- (3) die acht Dreiecksflächen des Oktaeders formen den Urbaustein des Luftelementes,
- (4) die zwanzig Dreiecksflächen des Ikosaeders formen den Urbaustein des Wasserelementes.



Die fünf regulären Körper und ihre zugeordneten Elemente in der Keplerschen Darstellung²⁶

Warum er bestimmte Elemente den entsprechenden Polyedern zuordnet, begründet Plato sorgfältig:²⁷

Der Erde wollen wir die Würfelform geben; denn von den vier Formen ist die Erde am unbeweglichsten ... ; notwendigerweise aber ist der Körper mit den festesten Grundflächen²⁸ von solcher Beschaffenheit. Was aber die Flächen betrifft, so ist in seinen Teilen und im Ganzen notwendig das gleichseitige Viereck stabiler als das gleichseitige Dreieck. Wenn wir also diese Form der Erde zuteilen, halten wir uns an die wahrscheinliche Erklärung. Dem Wasser

²⁶ Abb. aus: Kepler, Weltharmonik, II. Buch, XXV. Satz.

²⁷ Plato, Timaios (55d) bis (56b).

²⁸ Gemeint ist der Würfel.

hinwiederum teilen wir von den übrigen die unbeweglichste Form zu, die beweglichste dem Feuer, die mittlere der Luft.

Aber nicht nur die Grundeigenschaften der Elemente, sondern auch die Übergänge zwischen den Aggregatzuständen der Stoffe und deren chemische oder stofflichen Verwandlungen erklärt Plato aus der abstrakten Form der Urbausteine: Die Elemente Feuer, Luft und Wasser können sich, bedingt durch den einheitlichen Aufbau der Urbausteine aus gleichseitigen Dreiecken, ineinander verwandeln. So entsteht z.B. bei der Verbrennung eines Stoffes aus dem Feuerzustand der gasförmige Zustand, indem die vier Dreiecke des Tetraeders (= Feuer) auseinanderfallen, und sich zu je zwei in die Form des Oktaeders (= Luft) umordnen, der aus zweimal vier Dreiecken besteht. Oder: bei der Verdampfung von Wasser können sich die vierzig Dreiecke zweier Ikosaeder (= Wasser) in die Dreiecksflächen von fünf Oktaedern (=Luft) umwandeln.

Eine Sonderrolle spielt lediglich das Element Erde, daß sich, aufgrund seiner andersartigen Dreiecke, nicht in ein anderes Element umzuwandeln vermag:

Wenn Erde mit Feuer zusammentrifft und von dessen spitzer Beschaffenheit aufgelöst wird, dürfte sie umbertreiben, ob nun im Feuer selbst gelöst oder in einer Masse von Luft oder Wasser, bis ihre Teile aufeinander treffend sich wieder miteinander verbinden und (erneut) Erde entstehen dürfte.²⁹

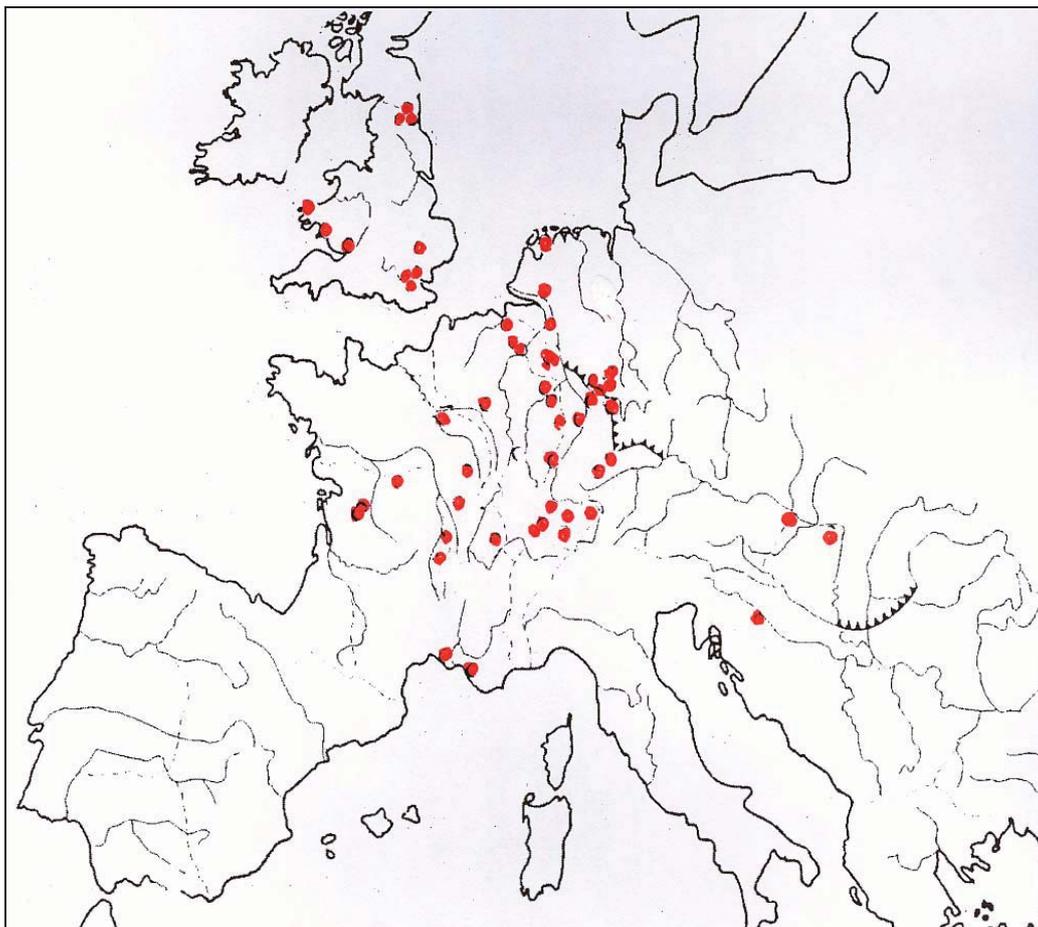
Keinem der vier Elemente kann jedoch das Dodekaeder zugeordnet werden:³⁰ *Da es aber noch eine fünfte Zusammensetzung (das Dodekaeder) gibt, bediente sich der Gott ihrer bei der Ausschmückung des Alls.* Der Sinn dieser Aussage scheint klar zu sein: Das Dodekaeder wird als der Himmelskugel einbeschrieben gedacht, wobei jede der zwölf Flächen des Dodekaeders eines der zwölf Großen Sternbilder aufnimmt. Ein Bild, das weitab vom geläufigen Bild des Zodiaks, der nach den Babyloniern die himmlische Sphäre wie ein Reif umspannt, nicht die astronomisch sichtbare Realität darstellt, sondern die Ordnung des Kosmos als abstrakte Idee fassen will. In schönster Weise ist diese Idee im silberbeschlagenen Bleidodekaeder von Genf ins Bildliche umgesetzt.

²⁹ Plato, Timaios (56d).

³⁰ Plato, Timaios (55c).

Die gallo-römischen Knopf-Dodekaeder

Eine bemerkenswerte Gruppe von bronzenen Dodekaedern, die in die letzten vorchristlichen und ersten nachchristlichen Jahrhunderte datiert werden, fällt durch ihre einheitliche ornamentale Gestaltung auf, die sogenannten „Knopfdodekaeder“.³¹ Sie stammen aus dem Bereich des ehemaligen Galliens, von den Grenzen zu Germanien und aus Südengland, also aus den gallo-römischen Gebieten. Ihre Fundgruppe ist inzwischen auf mehr als hundert Exemplare angewachsen.



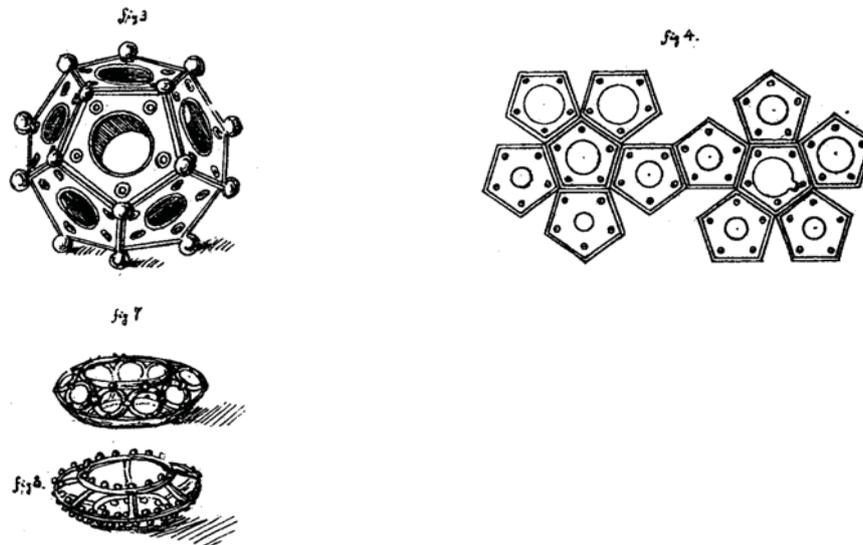
Fundstellen der Knopf-Dodekaeder

Diese Dodekaeder sind meistens faustgroß und hohl gegossen, also von mäßigem Gewicht. Ihre Seitenflächen weisen in der Mitte kreisförmige Löcher unterschiedlicher Größe auf, oft durch gravierte konzentrische Ringe eingefasst, ihre Eckpunkte zieren kleine bronzene Knöpfe. Gelegentlich zeigen die Seitenflächen noch weitere kleine Zierkreise. Ein Dodekaeder in London trägt an

³¹ Zur Geschichte der Dodekaeder-Forschung siehe v.a.: Guggenberger: Dodekaederforschung.

seinen Ecken jeweils drei Bronzeknöpfe auf.³² Die Bedeutung dieser Verzierungen ist noch ungeklärt, ebenso die generelle Funktion der Knopfdodekaeder.

Lindemann berichtet im Jahre 1897 über ein solches bronzenes Dodekaeder, das in Windisch (West-Schweiz) zusammen mit zwei bronzenen „Zierschalen“ gefunden wurde.³³



Das Dodekaeder von Windisch
und die Zierschalen

Das Dodekaeder von Windisch
(Abwicklung der Seitenflächen)

Anders als das Dodekaeder sind die Schalen nicht aus flächenartigen Elementen, sondern aus bronzenem Gitterwerk gebildet und ebenfalls dekorativ mit kleinen Knöpfen besetzt; sie stehen wohl in keinem Zusammenhang mit dem Dodekaeder. Die Knöpfe an den Ecken des Dodekaeders sprechen dagegen, daß es sich um einen Spielwürfel handeln könnte. Seine Seitenflächen sind mit den üblichen Löchern verschiedener Größe versehen.



Ceram's Bronzedodekaeder

Auch C.W. Ceram bildet in seinem Buch „Götter, Gräber und Gelehrte“ ein verblüffend ähnliches Bronzedodekaeder ab,³⁴ leider ohne Angabe, wo es gefunden wurde und wo es sich jetzt befindet. Seine Beschreibung lautet: „Ein Bronzegegenstand in Form eines Pentagondodekaeders; inmitten jeder Fläche befindet sich eine

³² Nouwen, Les dodécaèdres, S. 92.

³³ Lindemann, Zur Geschichte der Polyeder, § 18. S. 727 ff.

³⁴ Ceram, Götter, Gräber und Gelehrte, S. 43, Abb. 2.

runde Öffnung verschiedener Größe, und innen ist der Gegenstand hohl.“ Auffällig ist die Ausbildung des Loches in der frontal sichtbaren Fläche, es ist nicht kreisrund, sondern hat die Form eines Schlüsselloches.

Auch in Deutschland wurde eine Anzahl dieser Knopfdodekaeder gefunden, so z.B. im Jahre 1980 im saarländischen Homburg-Schwarzenacker.³⁵



Das Dodekaeder von Schwarzenacker

Kolling berichtet,³⁶ daß dieser „Würfel“, wie er ihn nennt, bei Grabungen in der Nähe der Opferschächte des innerörtlichen Kultbezirkes entdeckt wurde. Die Kanten besitzen eine durchschnittliche Länge von rund sechs Zentimetern.³⁷ Messungen an den Löchern des Dodekaeders, die, bis auf zwei an gegenüberliegende Seiten, von jeweils zwei konzentrischen Ringen umgeben sind und alle untereinander verschiedene Durchmesser aufweisen, haben sich bisher allen Deutungsversuchen widersetzt. Eine genauere Datierung wird in die Blütezeit der Ortschaft, also um 200 n. Chr. zu legen sein.

³⁵ Freundliche Mitteilung durch Frau Prof. Dr. Lichtenstern, Saarbrücken.

³⁶ Die folgende Darstellung nach Kolling, Die Römerstadt in Homburg-Schwarzenacker, S. 124 f. In seinem Bericht über diesen Fund berichtet A. Kolling (leider ohne Quellenangabe), daß bis zum Jahre 1932 einundfünfzig Exemplare dieser Art bekannt geworden seien, und bis 1993 etwa achtzig.

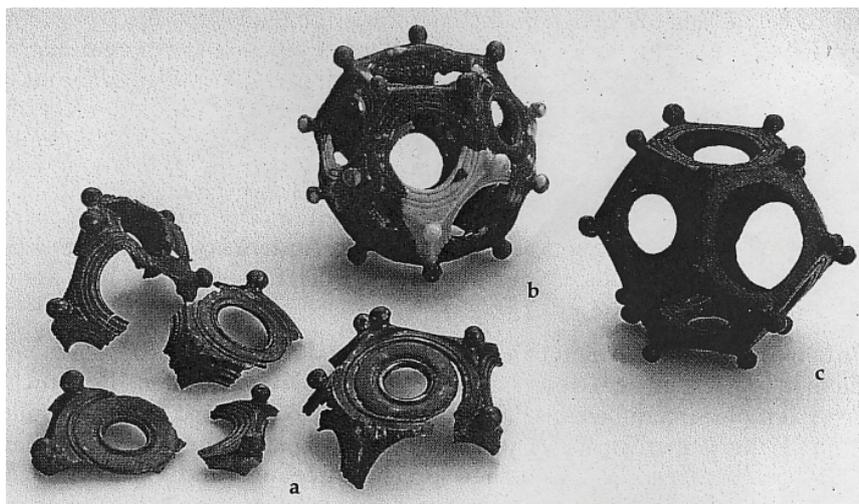
³⁷ Die Maßangabe von 60 cm bei der Abbildung auf Tafel 119 muß somit irrtümlich sein.



Das Monument im Römerpark

Inzwischen wurde das Dodekaeder in vergrößertem Maßstabe nachgegossen und auf einer fünfseitigen Steinsäule mit der umlaufenden Schrift „PENTAGON-DODEKAEDER“ als Monument im Römerpark Schwarzenacker aufgestellt.

Faust³⁸ berichtet über zwei neuerliche Funde³⁹ aus dem Boden des römischen Trier, die zwar zerbrochen sind, aber sich im einen Fall vollständig restaurieren ließen.



Das Dodekaeder aus Trier

links: die gefundenen Fragmente, oben: das rekonstruierte Dodekaeder,
rechts: ein moderner Abguß

³⁸ Faust, Zwei neue Pentagondodekaeder. Freundlicher Hinweis durch Herrn Dr. Kell, Homburg-Schwarzenacker.

³⁹ In den Jahren 1999 und 2003.

Die Bedeutung der Knopf-Dodekaeder ist nach wie vor unklar. Die Vielzahl von (teils absurden) Deutungen überdeckt ein weites Feld von „Wurfspiel, Kerzenständer, Kalibrierungs- oder Vermessungsgerät, Meisterstück eines Bronzegießers, Aufsatz eines Szepters oder einer Waffe“⁴⁰ bis zur kultischen Verwendung. Daß sie sehr wohl im Zusammenhang mit den Platonischen Körpern gesehen werden sollten, legt ähnlich mit kleinen Knöpfen an den Ecken verziertes Ikosaeder⁴¹ aus Arloff in Nordrhein-Westfalen nahe.⁴²

⁴⁰ Faust, Zwei neue Pentagondodekaeder, S. 34.

⁴¹ Bemerkenswerterweise das polare Polyeder zum Dodekaeder!

⁴² Im Rhein. Landmuseum Bonn Inv. 53,356.

Die Platonischen Körper bei Euklid und seinen Nachfolgern

Die erste mathematisch exakte und damit endgültig verbindliche Behandlung der Platonischen Körper brachte Euklid von Alexandria in seinem Hauptwerk *Elemente* (um 300 v.Chr.). Im XIII. Buch beschreibt er die geometrischen Konstruktionen für die einzelnen regulären Körper und für deren umbeschriebene Sphären (die sogenannten „Umkugeln“). Dazu untersucht er zunächst in den §1 bis §18 die metrischen Zusammenhänge der Kantenlänge eines vorgegebenen Polyeders mit dem Durchmesser der entsprechenden Umkugel. Im § 18a führt er dann den Nachweis, daß es keinesfalls mehr als die fünf regelmäßigen Polyeder geben kann. Euklids *Elemente* verdrängte die ältere Fachliteratur völlig.⁴³ Sie galten seit der Antike bis ins Mittelalter als das führende Lehrbuch der Mathematik und dienten noch um 1300 in Konstantinopel als Grundlage von Vorlesungen. Auch Archimedes (ca. 285-212 v.Chr.) bezieht sich auf Euklid, geht aber in seinen Schriften über dessen Theorie der Platonischen Körper hinaus, indem er dreizehn neue „halbreguläre Polyeder“ schuf, die seitdem die „Archimedischen Körper“ heißen.

Beide Klassen von Polyedern beschäftigten Generationen von alexandrinischen Mathematikern. Sie entdeckten mit Scharfsinn neue Zusammenhänge zwischen den charakteristischen Maßverhältnissen und bestimmten die Maßzahlen. Einer der größten von ihnen war Hypsikles von Alexandria (zwischen 200 und 100 v.Chr.), der überraschende Beziehungen zwischen Würfel, Ikosaeder und Dodekaeder fand⁴⁴ und sie derart klar bewies, daß man sein Werk lange Zeit Euklid zuschrieb.⁴⁵ In gleicher Weise wurde das Werk eines weiteren, unbekannt gebliebenen Mathematikers des zweiten oder dritten nachchristlichen Jahrhunderts Euklid zugesprochen und als das XV. Buch der *Elemente* veröffentlicht. Der Autor zeigt darin, wie die Platonischen Körper sich einander einbeschreiben lassen.⁴⁶ Pappos von Alexandria (300-350 n.Chr.), der die „fünf einfachen Maschinen“ (Hebel, Rolle, Wellrad, Keil und Schraube) erstmals systematisch beschrieben hat,

⁴³ Die folgende Darstellung nach: Heiberg, Geschichte der Mathematik, und: Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

⁴⁴ (1) Die Oberfläche des Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche des eingeschriebenen Ikosaeders, wie die Seite des Würfels zur Seite eingeschriebenen des Ikosaeders. (2) Der Körper des Dodekaeders verhält sich zum Körper des einbeschriebenen Ikosaeders wie die Seite des Würfels zu der des einbeschriebenen Ikosaeders.

⁴⁵ Manche Euklid-Manuskripte führen es als das XIV. Buch auf.

⁴⁶ Einbeschreiben eines Tetraeders in einen Würfel, eines Oktaeders in einen Tetraeder, eines Oktaeders in einen Würfel, eines Würfels in einen Oktaeder, eines Dodekaeders in einen Ikosaeder. Weiter bestimmt er die Ecken- und Seitenzahlen sowie die Neigungswinkel sämtlicher Grenzflächen all dieser einbeschriebenen Körper.

behandelte in seinem nur fragmentarisch überlieferten Hauptwerk *Collectio* oder *Synagoge* ebenfalls die Einbeschreibbarkeit der Platonischen Körper in Umkugeln.⁴⁷

Durch den Niedergang der Schulen in Alexandria und Athen (529: Schließung der Akademie durch Justinian) gingen zahlreiche Wissenschaftler nach Konstantinopel oder an den Hof der Kalifen. Hier waren es die großen arabischen Mathematiker wie Al-Khwarizmi (ca. 800 bis ca. 850)⁴⁸ und Abu'l-Wafa (940-998), die die antiken Wissenschaften bewahrten und an der Hochschule von Bagdad lehrten. Beide fanden neue Wege, die Rauminhalte der Platonischen Körper zu berechnen und ihre In- und Umkugeln geometrisch zu ermitteln. Abu'l Wafa war der erste, der die sphärischen Darstellungen der Platonischen Körper⁴⁹ als topologisch äquivalent zu den entsprechenden flächigen und geradkantigen, quasi-kristallinen Darstellungen der Platonischen Körper erkannte und beschrieb. Erst Jahrhunderte später kehrten diese Kenntnisse nach Europa zurück, unter anderem über den blühenden Hof des Stauferkaisers Friedrich II. in Süditalien. Hier war es der Pisaner Leonardo Fibonacci (ca. 1170 bis nach 1240), der bei seinen Reisen nach Algerien, Ägypten, Byzanz, Syrien, Sizilien und in die Provence Kontakt zu den dort lehrenden Mathematikern suchte. Seine erworbenen Kenntnisse faßte er in seinem Buch *Practica geometriae* (1220/21) zusammen. Im sechsten Kapitel dieses Werks, das zwei Jahrhunderte später großen Einfluß auf Fra Luca Pacioli ausüben sollte, behandelt auch er die regulären Körper.

⁴⁷ Pappos, *Collectio*, III. Buch, 4. Abhandlung. Er geht jedoch den entgegengesetzten Weg wie Euklid: er gibt die Umkugel vor und ermittelt auf ihrer Oberfläche diejenigen Punkte, die dann zu Eckpunkten der einbeschriebenen Polyeder werden.

⁴⁸ Von Al-Khwarizmi stammt die neuartige Rechenmethode „al-jabr“ (= Ergänzung), von der sich die moderne Bezeichnung „Algebra“ herleitet.

⁴⁹ Wie sie die steinzeitlichen „carved stone balls“ aufweisen.

Die Platonischen Körper in der Renaissance

Die Wissenschaftler oder Künstler, die im fünfzehnten und sechzehnten Jahrhundert perspektivische Aufgabenstellungen oder allgemein Geometrie studierten, kamen kaum umhin, sich auch mit den Platonischen und Archimedischen Körpern auseinanderzusetzen. Als krönender Abschluß solcher Studien hatte bisher die mathematisch exakte Konstruktion eines Pentagondodekaeders oder der noch komplizierteren Archimedischen Körper gegolten. Jetzt trat eine völlig neue Aufgabenstellung hinzu, nämlich diese komplexen Gebilde auch überzeugend perspektivisch darzustellen. Auf zahlreichen Wissenschaftler- und Künstler-Porträts findet man nun diese kristallin geformten Gebilde in perfekter Perspektive als Attribute abgebildet; wobei man wohl zu unterscheiden hat zwischen den polyederartigen Gerätschaften, die auf den Beruf oder eine Liebhaberei des Porträtierten hinweisen,⁵⁰ und den rein geometrischen Körpern, die vor allem bezeugen sollen, wie tief der Dargestellte in die Geheimnisse der Mathematik und der Geometrie eingedrungen ist.

Stellvertretend für die Vielzahl von Geometriekundigen seien vier Künstler und Wissenschaftler kurz genannt, die das Interesse an mathematischen Aufgaben miteinander verband, die sich teils persönlich kannten und voneinander gelernt haben.

Die Platonischen Körper bei Piero della Francesca

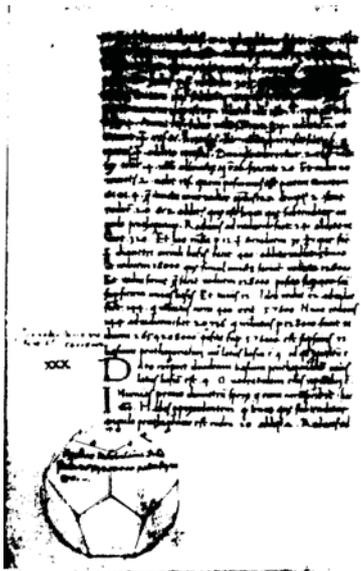
Die Bedeutung Piero della Francescas (1420-1492) für die geometrischen Wissenschaften liegt in den wegbereitenden Untersuchungen zur Natur der räumlichen Anordnungen und den eingehenden Studien zu linearen Perspektive. Er verfaßte sein Hauptwerk *De prospettiva pingendi* erst gegen Ende seines Lebens, aus seinen Bildern ist jedoch deutlich zu ersehen,⁵¹ daß er komplexe perspektivische Konstruktionen schon sehr viel früher beherrschte.

Sein Werk *Libellus de quinque corporibus regularibus* über die Platonischen Körper befindet sich als lateinisches Manuskript, mit geometrischen Zeichnungen von Pieros Hand, in der Vatikanischen Bibliothek. Einer seiner Schüler, Fra Luca Pacioli, veröffentlichte diese Abhandlung im Jahre 1497, also fünf Jahre nach Pieros Tod, auf Italienisch als letztes Kapitel in einem eigenen Werk mit dem Titel *De divina proportione*.⁵²

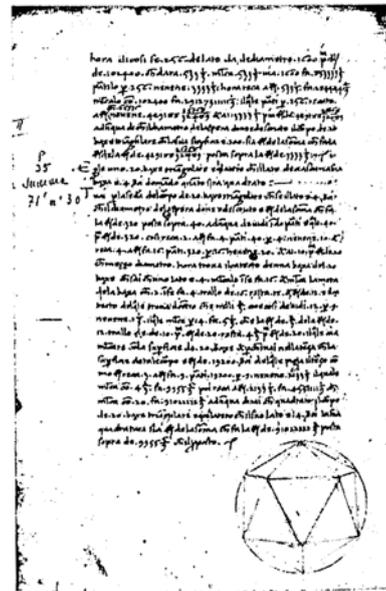
⁵⁰ Prominente Beispiele hierfür sind die beiden Porträts des Hans Holbein d.J. *Der Astronom Nikolaus Kratzer* (1528) und *Die Gesandten* (1533). Auf beiden Bildern ist eine Sonnenuhr dargestellt, die die Form eines Oktaeders mit gekappten Spitzen aufweist.

⁵¹ Z.B. in den schwarz-weißen Fußbodenornamenten seiner *Geißelung* in Urbino.

⁵² Ohne Pieros Autorschaft zu erwähnen.



Pentagondodekaeder aus Piero della Francescas
Manuskript *Libellus de quinque corporibus
regularibus*⁵³



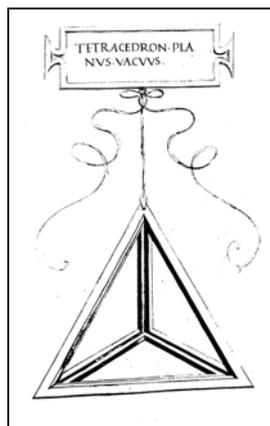
Ikosaeder aus Piero della Francescas
Manuskript *Trattato d'abaco*⁵⁴

Fra Luca Pacioli und sein Buch *De Divina Proportione*

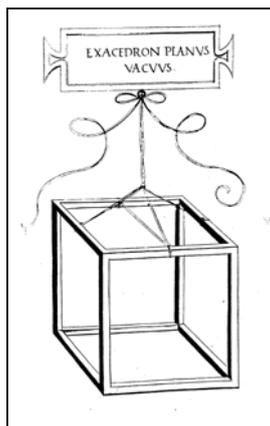
Der große Mathematiker Luca Pacioli (1445-1517) soll seine erste Ausbildung in Borgo San Sepolcro im Atelier seines Mitbürgers Piero della Francesca erhalten haben, bei dem er die Grundkenntnisse von Perspektive, Arithmetik und Geometrie erwarb. Als junger Mann trat er in die Dienste eines venezianischen Kaufmanns, als Hauslehrer bei dessen Söhnen, und studierte währenddessen Mathematik bei Domenico Bragadino, der nahe dem Rialto Privatvorlesungen für Studenten hielt, die nicht nach Padua gehen mochten. Mit etwa fünfundzwanzig Jahren trat er dem Franziskanerorden bei. Nach Abschluß seiner theologischen Studien hielt er selber mathematische Vorlesungen an den Universitäten von Perugia, Zara (heute Zadar, Jugoslawien), Rom, Neapel und Bologna. Im Jahre 1497 folgte er einer Einladung durch Ludovica Sforza nach Mailand, wo er mit Leonardo da Vinci zusammenkam. Aus Leonardos Tagebüchern geht hervor, daß er wiederholt Fra Luca wegen mathematischer Probleme um Rat fragte. Berühmt und später immer wieder neu aufgelegt waren seine beiden frühen Werke *Summa de arithmetica* (1494) und *De divina Proportione* (1497).

⁵³ Vatikan, Biblioteca Apostolica Vaticana, cod. Urb. Lat. 632, f. 33v.

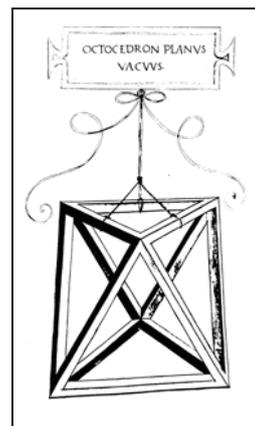
⁵⁴ Florenz, Biblioteca Medicea Laurenziana, cod. Ashburnhamiano 280 (359*-291*), f. 113v.



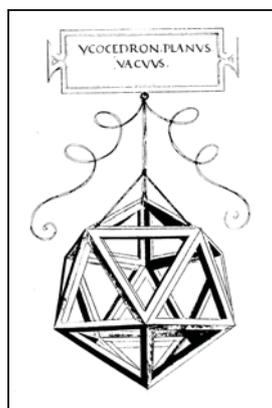
Tetraeder



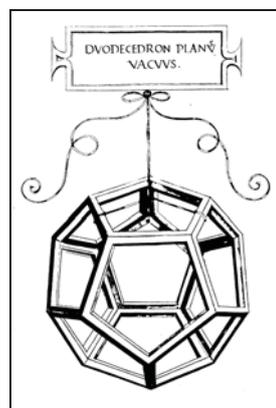
Würfel



Oktaeder



Ikosaeder



Pentagondodekaeder

Die Platonischen Körper aus *De divina proportione* (1497)⁵⁵
nach Leonardo da Vincis Entwürfen

Die *Summa de arithmetica*, ein enzyklopädisches Werk von rund 600 Folio-Seiten, faßt das gesamte bekannte arithmetische Wissen seiner Zeit zusammen, und zwar in der Volkssprache. Neben den Elementen der Algebra behandelt es sowohl die theoretischen wie auch die praktischen Aspekte der Arithmetik, enthält Münz-, Gewicht- und Maßstabellen und stellt erstmals die doppelte Buchführung der venezianischen Kaufleute der Öffentlichkeit vor.

In der *De divina Proportione*, ebenfalls in Italienisch abgefaßt, behandelt Pacioli im ersten Teil *Compendio de divina proportione* die Lehre vom „Goldenen Schnitt“, faßt im zweiten Buch die Prinzipien der Architektur nach Vitruv in einem *Tractato de l'architettura* zusammen und bringt schließlich im dritten Teil *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium* eine italienische Übersetzung von Piero della Francescas *De corporibus regularibus*, in dem, über die Platonischen Körper hinausgehend, die Konstruktion Archimedischer Körper durch Abschneiden und Hinzufügungen von den Platonischen abgeleitet wird. Die Entwürfe zu den 56 Abbildungen dieser Konstruktionen zeichnete Leonardo da Vinci, vielleicht nach real existierenden (Holz-)Modellen.

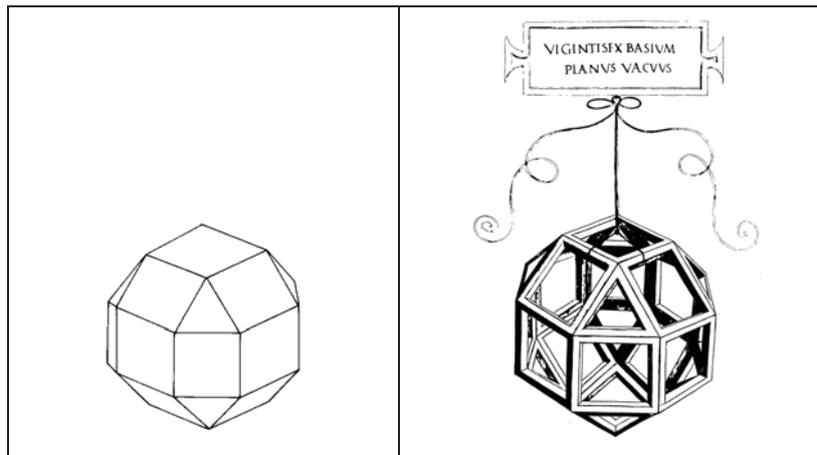
⁵⁵ Pacioli, *De divina proportione*, Tafeln VIII, XVI, XXII und XXVIII.

Jacopo de Barbari (1440/50-1516) malte ein Doppelporträt von Fra Luca Pacioli und seinem Schüler Guidobaldo da Montefeltro, dem jungen Herzog von Urbino.⁵⁶ Pacioli erläutert gerade ein geometrisches Problem anhand einer Euklidischen Konstruktion und eines vor seinen Augen hängenden kristallinen Archimedischen Körpers,⁵⁷ rechts auf dem Tisch liegt ein Pentagondodekader.

Dem abgebildeten Archimedischen Körper hatte schon Piero della Francesca in seinem Buch *De corporibus regularibus* einen eigenen Abschnitt gewidmet, und entsprechend gibt ihn Pacioli im dritten Teil seines *Libellus* auf Tafel XXXVI wieder. Er galt wegen seiner komplizierten Winkelverhältnisse als eines der am schwierigsten zu konstruierenden Gebilde, und darin ist wohl der Grund zu sehen, weshalb sich Pacioli gerade mit diesem Körper abbilden ließ.

⁵⁶ Das Bild befindet sich im Capodimonte-Museum in Neapel.

⁵⁷ Es handelt sich um einen sogenannten „Rhombenkuboktaeder“ mit 18 Quadraten und 8 Dreiecken, dessen geometrische Konstruktion durch das „Abschleifen“ aller Kanten eines Würfels im Verhältnis $1 : \sqrt{2} : 1$ als besondere Herausforderung für die Mathematiker galt. Die Anfertigung eines solchen Körpers in Glas oder anderem transparenten Material war damals kaum möglich; wir haben ihn eher als imaginären Körper, sozusagen als das Abbild der Paciolischen Erörterungen, zu betrachten.



geometr. Darstellung

Darstellung bei Pacioli

Rhombenkuboktaeder

Paciolis Mailänder Aufenthalt endete mit dem Einfall der französischen Armee im Jahre 1499. Er reiste gemeinsam mit da Vinci über Mantua und Venedig nach Florenz, wo sie zunächst eine gemeinsame Wohnung teilten. Ab 1501 hatte Pacioli eine Anstellung an der Universität von Bologna als „lector ad mathematicam“. Im Jahre 1509 edierte Pacioli eine lateinische Euklid-Ausgabe, die auf einer älteren Übersetzung aus dem Arabischen des 13. Jahrhunderts basiert. Seine entsprechende italienische Übersetzung gelangte aus ungeklärten Gründen nicht in den Druck, ebenso wenig wie Paciolis Abhandlung über das Schachspiel. Beide Manuskripte sind nicht erhalten geblieben.

Albrecht Dürer und Fra Luca Pacioli

In die Zeit von Paciolis Bologneser Universitätstätigkeit fällt das vermutete, aber nicht zweifelsfrei zu belegende Zusammentreffen mit Albrecht Dürer, der Ende des Jahres 1506, also bei seinem zweiten Italienaufenthalt, von Venedig nach Bologna ritt, um der „*kunst willen in heimlicher perspectiua, die mich einer leren will.*“ Bei diesem „*einen*“ handelte es sich sehr wahrscheinlich um Pacioli oder einen seiner mathematisch erfahrenen Schüler.⁵⁸

Acht Jahre später findet sich auf seiner *Melencolia I.* eines der Polyeder wieder, mit denen sich Pacioli beschäftigt hatte. Dürer wählt hier mit Bedacht keinen der kristallin klaren Platonischen oder Archimedischen Körper, sondern ein ungefüges, wohl als Stein gedachtes Gebilde mit sechs Fünfeck- und zwei Dreieckflächen. Ihm liegt die Gestalt eines Rhombenhexaeders zugrunde, dessen ursprünglich kraftvoll aufstrebende Tendenz (von der Astrologie Jupiter zugeschrieben) durch die Kapung der beiden gegenüberliegenden Spitzen ins bedrückend-lastend Saturnische

⁵⁸ Dürer, Katalog der Ausstellung, S. 347.

Abbildungen auf Gemälden und in Büchern

Nachdem die perspektivischen Probleme bei der Darstellung polyedrischer Körper prinzipiell gelöst waren, finden sich ab etwa der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts vermehrt Platonische und Archimedische Körper auf Tafelbildern, in Lehrbüchern der Perspektive oder in Musterbüchern für Goldschmiede, Kunsttischler und andere Handwerker.

Eines der schönsten Beispiele ist das Porträt des Nürnberger Schriftmeisters Johann Neudörffer (1497-1563). Dieser legte, vor allem gegen Ende seines Lebens, großen Wert darauf, als „*Arithmeticus*“ und „*Rechenmeister*“ zu signieren.⁶² Von seinem Schwager, dem gelehrten Buchdrucker Johann Petrejus, wurde er häufig als Fachmann für mathematische Publikationen hinzugezogen, ebenso als Lektor und Berater. Seine geometrischen Interessen teilte er mit dem ihm freundschaftlich zugewandten Goldschmied Wenzel Jamnitzer. Ein Kupferstich zeigt die beiden, mit solchen Studien beschäftigt, an einem Arbeitstische.

Auf dem großen Porträt, das Nicolaas Neufchatel im Jahre 1561 von ihm malte, weisen ihn die beiden Platonischen Körper als kundigen Mathematiker aus: Mit einem Stechzirkel greift Neudörffer die Maße eines Dodekaeders ab, den er in seiner Linken hält, und diktiert die Meßwerte einem Schüler, vielleicht seinem Sohn. Über seinem Kopfe hängt das Modell eines Würfels oder Hexaeders.

⁶² Doede, Johann Neudörffer, S. 42.

Gerade in Nürnberg erschienen einige Buchpublikationen, die das perspektivisch richtige Zeichnen nach stereometrischen Gebilden lehrten:⁶³

1543 August Hirschvogel, Graphiker und Glasmaler:

Eigentliche und gründliche Einweisung in die Geometrie, sonderlich aber wie alle regulierte und unregulierte Corpora in den Grund geleget und in Perspectiv gebracht auch mit ihren Linien aufgezogen werden sollen. Nürnberg 1543

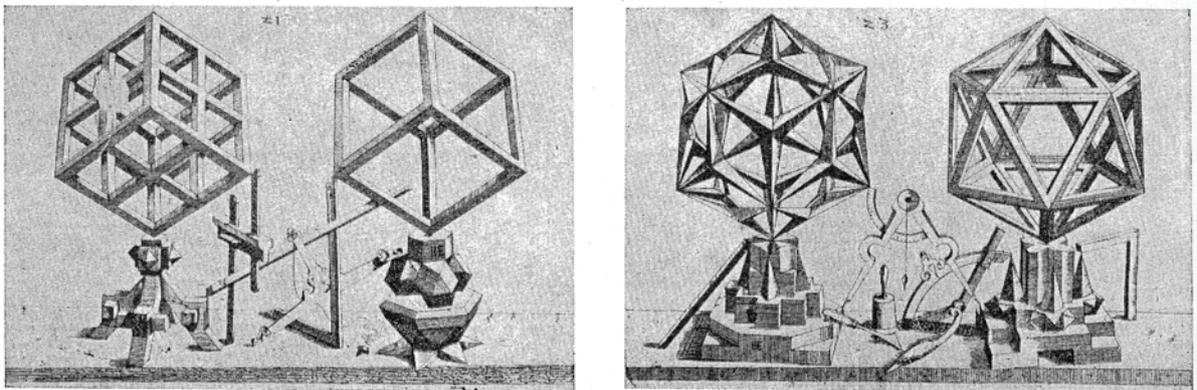
1568 Wenzel Jamnitzer, Goldschmied:

Perspectiva Corporum Regularium. Nürnberg 1568
(mit Illustrationen von Jost Amman)

1571 Hans Lencker, Goldschmied:

Perspectiva Corporum. Nürnberg 1571

Im Jahre 1599 veröffentlichte der „Schreinergereselle“ Hans Jakob Ebelmann aus Speyer zusammen mit dem Straßburger Jakob Guckeisen eine Folge von vierundzwanzig Kupferstichen, deren letzte Blätter durchbrochene Modelle von regelmäßigen und halbregelmäßigen Körpern abbilden.



Hans Jakob Edelmann: Polyeder
(links: zwei Würfel, rechts: Ikosaeder)

Von der Aura ihrer einstigen Bedeutung ist nichts mehr zu erahnen. Höchst dekorativ balancieren sie auf kunstvoll gestalteten, wohl hölzernen Piedestalen und dienen entweder als Modelle zum Erlernen und Üben des perspektivischen Zeichnens, oder auch als kuriose Meisterstücke für Kunstsammlungen oder naturwissenschaftliche Kabinette.

⁶³ Graf, Kupferstiche eines Speyerer Kunsttischlers.

Die Keplersche Weltenharmonie

Das Keplersche Planetensystem

Als Johannes Kepler (1571-1630) sich als junger Mathematiker in Graz mit der Astronomie befaßte, war die Lehre vom heliozentrischen Planetensystem gerade ein halbes Jahrhundert alt. Kopernikus und sein Buch *De Revolutionibus Orbium Coelorum*⁶⁴ wurde von der Kirche abgelehnt, auch von vielen Wissenschaftlern mit großer Skepsis betrachtet. Kennzeichnend ist der Satz Osianders, daß die neue Hypothese wohl mathematisch richtig sein mag, aber „*nicht wahr, nicht einmal wahrscheinlich*“ sein kann. Kepler war überzeugt, das „Wahre“ und das „Wahrscheinliche“ beweisen zu können.

Im Vorwort zur zweiten Auflage seines Werks *Weltgeheimnis* schildert er den Weg, den er glaubte einschlagen zu müssen: „*Wenn nun, so dachte ich mir, Gott bei den Bahnen (der Planeten) die Bewegungen den Entfernungen angepaßt hat, so muß er sicher auch die Entfernungen irgend einem anderen Ding angepaßt haben.*“

Nach langwierigen Berechnungen, die keinen Erfolg brachten, kam ihm intuitiv während einer Vorlesung am 9. Juli 1595 ein Gedanke, den er sich selber zunächst nicht erklären konnte: Es stellte sich ihm die Frage: Besteht ein Zusammenhang zwischen der Zahl „fünf“ der Platonischen Körper und der Zahl „sechs“ der damals bekannten Planeten? „*Wenn sich nun, dachte ich, für die Größe und das Verhältnis der sechs Himmelsbahnen, die Kopernikus annimmt, fünf Figuren unter den übrigen unendlich vielen ausfindig machen ließen, die vor den anderen besondere Eigenschaften voraus hätten, so ginge die Sache nach Wunsch. Aber: Was sollen ebene Figuren bei den räumlichen Bahnen? Man muß eber zu festen Körpern greifen. ... Wenn man einem, der die Geometrie auch nur wenig kennt, das sagt, so treten ihm sogleich die fünf regulären Körper mit ihren Verhältnis der um- und der einbeschriebenen Kugeln vor Augen. ...*“⁶⁵

Spontan schreibt er noch am selben Tage hin, wie er sich den Aufbau des Planetensystems vorstellt: *Die Erdsphäre ist das Maß für alle anderen Bahnen. Ihr umschreibe ein Dodekaeder; die dieses umspannende Sphäre wird die Marsbahn sein. Der Marsbahn umschreibe eine Pyramide; die diese umspannende Sphäre wird die Jupiterbahn sein. Der Jupiterbahn umschreibe einen Würfel; die diesen umspannende Sphäre wird die Saturnbahn sein. Nun lege in die Erdbahn ein Ikosaeder; die diesem einbeschriebene Sphäre wird die Venusbahn sein. In die Venusbahn lege ein Oktaeder; die diesem einbeschriebene Sphäre wird die Merkurbahn sein. Damit hast du den Grund für die Anzahl der Planeten.*⁶⁶

⁶⁴ Es erschien 1543 mit einem Vorwort des Nürnberger protestantischen Theologen Andreas Osiander.

⁶⁵ Aus: Kepler, *Weltgeheimnis*, Vorrede.

⁶⁶ Ebd.

Kepler überprüfte die Maßzahlen dieser vermuteten Anordnung anhand der empirisch gemessenen Angaben. Verblüffenderweise⁶⁷ stimmten die von ihm mathematisch ermittelten Daten mit den astronomischen Befunden weitestgehend überein.

Kepler begann nun eine sorgfältige Begründung für sein aus der Intuition und der geometrischen Anschauung gewonnenes System. Er untersucht die fünf regelmäßigen Körper und ihre Eigenschaften unter den unterschiedlichsten, vor allem geometrischen, aber auch ästhetischen Blickwinkeln und teilt sie danach in zwei Klassen ein:⁶⁸

Die 1. Klasse hat folgende Eigenschaften:

Besteht aus Würfel, Pyramide und Dodekaeder:

Die Körper haben alle unterschiedlich geformte Seitenflächen.

Ihre Ecken werden nur von je drei Seitenflächen gebildet.

Sie verdanken alle drei ihren Ursprung und ihre Eigenschaften keinem anderen Körper.

(Sie) lassen sich gefällig bewegen, wenn man durch die Mittelpunkte einer oder zweier gegenüberliegender Seitenflächen einen Durchmesser zieht.

(Ihnen) ist es zu eigen zu stehen.

Sie treten in vollkommener Dreizahl auf.

Sie weisen drei unterschiedliche Winkel (rechte, spitze und stumpfe) auf.

Die 2. Klasse hat folgende Eigenschaften:

Besteht aus Oktaeder und Ikosaeder.

Beide Körper haben als Seitenflächen das gleiche Dreieck.

Ihre Ecken werden von vier oder von fünf Seitenflächen gebildet.

Sie sind von den Körpern der 1. Klasse hergeleitet.

(Sie) nur, wenn man durch gegenüberliegende Ecken einen Durchmesser zieht.

(Ihnen ist es zu eigen) zu schweben.

Sie in der unvollkommenen Zweizahl.

Sie haben nur stumpfe Winkel.

Aus diesen unterschiedlichen Merkmalen leitet Kepler ab, daß die Sphäre mit der Erdbahn sich nur zwischen den Platonischen Körpern dieser beiden Klassen befinden könne:⁶⁹

Da also der Unterschied zwischen den Körpern offen zutage lag, konnte es nichts Passenderes geben, als unsere Erde, die doch die Summe der Welt, die Welt im Kleinen, und daher die vornehmste unter den Planeten ist, mit ihrer Bahn zwischen die genannten zwei Klassen zu legen. ... Da nach Kopernikus drei Planeten oberhalb der Erde sich befinden, müssen wir die drei Körper erster Klasse, Würfel Pyramide und Ikosaeder außerhalb der Erdbahn anbringen, den Oktaeder und Dodekaeder innerhalb.

⁶⁷ Für uns jedenfalls. Kepler hat es bestimmt nicht anders erwartet.

⁶⁸ Kepler, *Weltgeheimnis*, 3. Kapitel.

⁶⁹ Kepler, *Weltgeheimnis*, 4. Kapitel.

Wie die Reihenfolge der drei Polyeder der ersten Klasse zwischen den Planeten Saturn, Jupiter und Mars angeordnet werden muß, begründet Kepler mit Argumenten, die hier ihrer Eigenart wegen, allerdings nur auszugsweise, im Wortlaut angeführt werden sollen:⁷⁰

Der Würfel mußte den Fixsternen nabegerückt werden und das erste Verhältnis, das zwischen Saturn und Jupiter, festlegen. Denn der vornehmste Teil der Welt außer der Erde sind die Fixsterne. ... Der Würfel aber ist in seiner Reihe der erste. ... Er allein ist nach allen Seiten hin orientiert und erstreckt sich nach drei aufeinander stehenden Dimensionen. ... Aber auch das dürfen wir nicht übergehen, daß die erfinderische Natur das vollkommenste Geschöpf mit den gleichen Raumbeziehungen aufs vollkommenste ausgestattet hat, wahrlich ein deutlicher Beweis, wie hoch sie die Bedeutung dieses Körpers einschätzt. Denn der Mensch selber ist sozusagen ein Würfel, der sechs Seiten hat: oben, unten, vorne, hinten, rechts links. ... Da die Pyramide⁷¹ ... eine spitze Ecke hat, kommt sie vor den Körpern mit stumpfen Ecken.⁷² ... Wenn der rechte Winkel vor dem spitzen kommt, so hat auch der Würfel den Vorzug vor der Pyramide, der aus Vierecken zusammengesetzte Körper vor dem aus Dreiecken zusammen gesetzten. ... Da die Sechszahl der Seitenflächen eine vollkommene „Zahl“ ist,⁷³ so folgt, daß die Pyramide, die darunter bleibt, nicht vor dem Würfel kommen kann, sondern unmittelbar auf ihn folgen muß. ... Wir haben also den Grund, warum an zweiter Stelle zwischen Jupiter und Mars die Pyramide liegt. ... Da von den Körpern erster Klasse das Dodekaeder übrig ist, kommt es in der Reihe an die dritte Stelle zwischen Mars und Erde.

Nach ähnlichen Gesichtspunkten, werden nun die Platonischen Körper der zweiten Klasse zwischen Erde, Venus und Merkur angeordnet:⁷⁴

Da sich der Würfel dem nach der Erde vornehmsten Teil der Welt nähert, ihrem äußersten Umfang, d.h. den Fixsternen, war es angemessen, das auch das Haupt der zweiten Klasse (das Oktaeder) an eine bedeutsamere Stelle der Welt innerhalb der Erdbahn trete,. Nichts aber ist bedeutsamer als der Mittelpunkt und die Sonne. Wenn wir die beiden Reihen von Körpern als eine Reihe betrachten, was könnte es Eleganteres geben, als daß diese eine Reihe auf beiden Seiten mit den einander ähnlichen und vorzüglichsten Körpern abschließt? Auch ist es schöner, wenn die Körper mit vielen Seitenflächen in der Mitte aufeinander folgen und die Vielzahl der Seitenflächen allmählich nach beiden Seiten hin abnimmt.

⁷⁰ Kepler, *Weltgeheimnis*, 5. und 6. Kapitel.

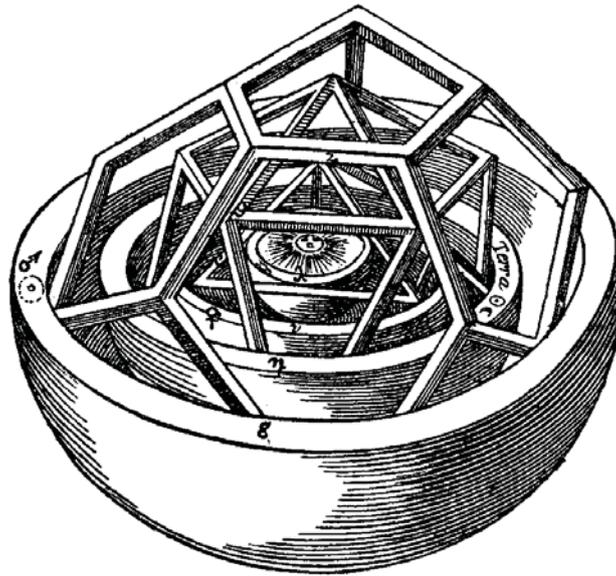
⁷¹ Der Tetraeder.

⁷² Somit kommt sie vor dem Dodekaeder.

⁷³ Eine Zahl, deren Teiler aufaddiert die Zahl wieder ergeben, hieß bei den Pythagoreern eine „vollkommene Zahl“. Ein Beispiel ist $1 + 2 + 3 = 6$.

⁷⁴ Kepler, *Weltgeheimnis*, 7. und 8. Kapitel.

Unter den zahlreichen Abbildungen des Werkes befindet sich eine Darstellung der Planetensphäre des Mars mit der ihr einbeschriebenen Dodekaeder, Ikosaeder und Tetraeder sowie der Sphären von Erde, Venus und Mars mit der Sonne als strahlendem Mittelpunkt.



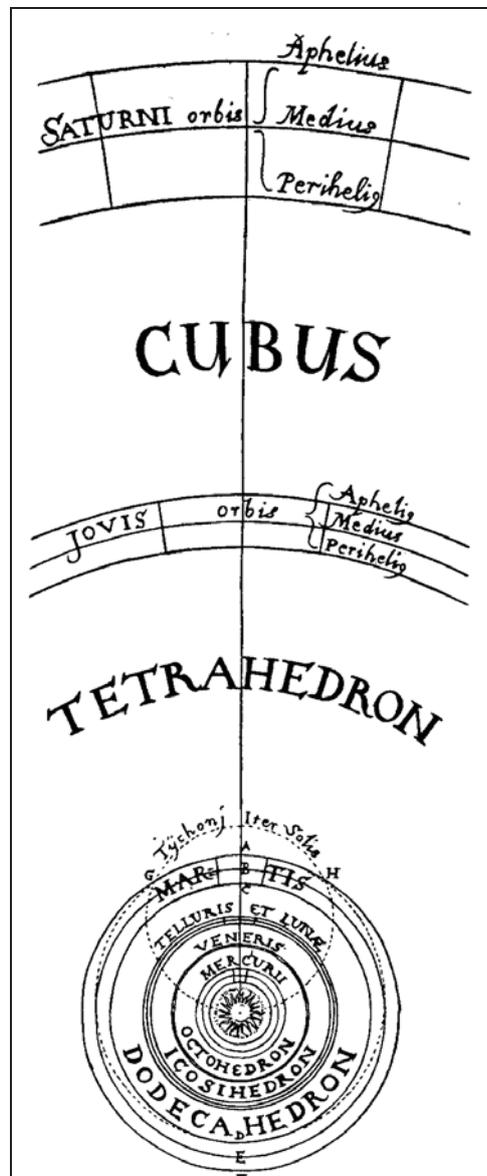
Die Marssphäre mit den einbeschriebenen
Platonischen Körpern

Die Abweichungen der astronomisch gemessenen Daten von den von ihm errechneten Daten, die auf Abweichungen der Planetenbahnen von der perfekten Kreisform zurückzuführen sind, berücksichtigte Kepler dadurch, daß er die ursprünglich „ideal dünn“ gedachten Planetensphären durch Kugelschalen von gewisser Dicke ersetzte und den Planeten „erlaubte“, sich jeweils innerhalb der äußeren und inneren Begrenzungen dieser Schalen zu bewegen:⁷⁵

„Den Bahnen selber lasse ich eine solche Dicke, wie sie durch den Auf- und Abstieg des Planeten gefordert wird. ... Wenn die Körper so eingeschaltet sind, wie ich gesagt habe, dann muß die Innenseite einer oberen Sphäre mit der Umkugel des Körpers, die Außenseite der nächst unteren Sphäre mit seiner Inkugel zusammenfallen. ... Und nun siehe, wie entsprechende Zahlen einander nahe kommen.“

⁷⁵ Kepler, *Weltgeheimnis*, 14. Kapitel,

Dieses modifizierte Planetenmodell mit den von ihm postulierten Dicken der Planetenschalen stellte Kepler fünfundzwanzig Jahre später in seinem Werk *Weltharmonik*⁷⁶ schematisch dar:



Die Platonischen Körper mit ihren In- und Um-Kugeln⁷⁷

Gegen Ende des Jahres 1596 konnte der 25jährige Kepler in Tübingen sein Erstlingswerk „*Mysterium Cosmographicum*“⁷⁸ veröffentlichen. Mit einer ausführlichen Vorrede, in der er sich abschließend selbstbewußt an den Leser wendet:

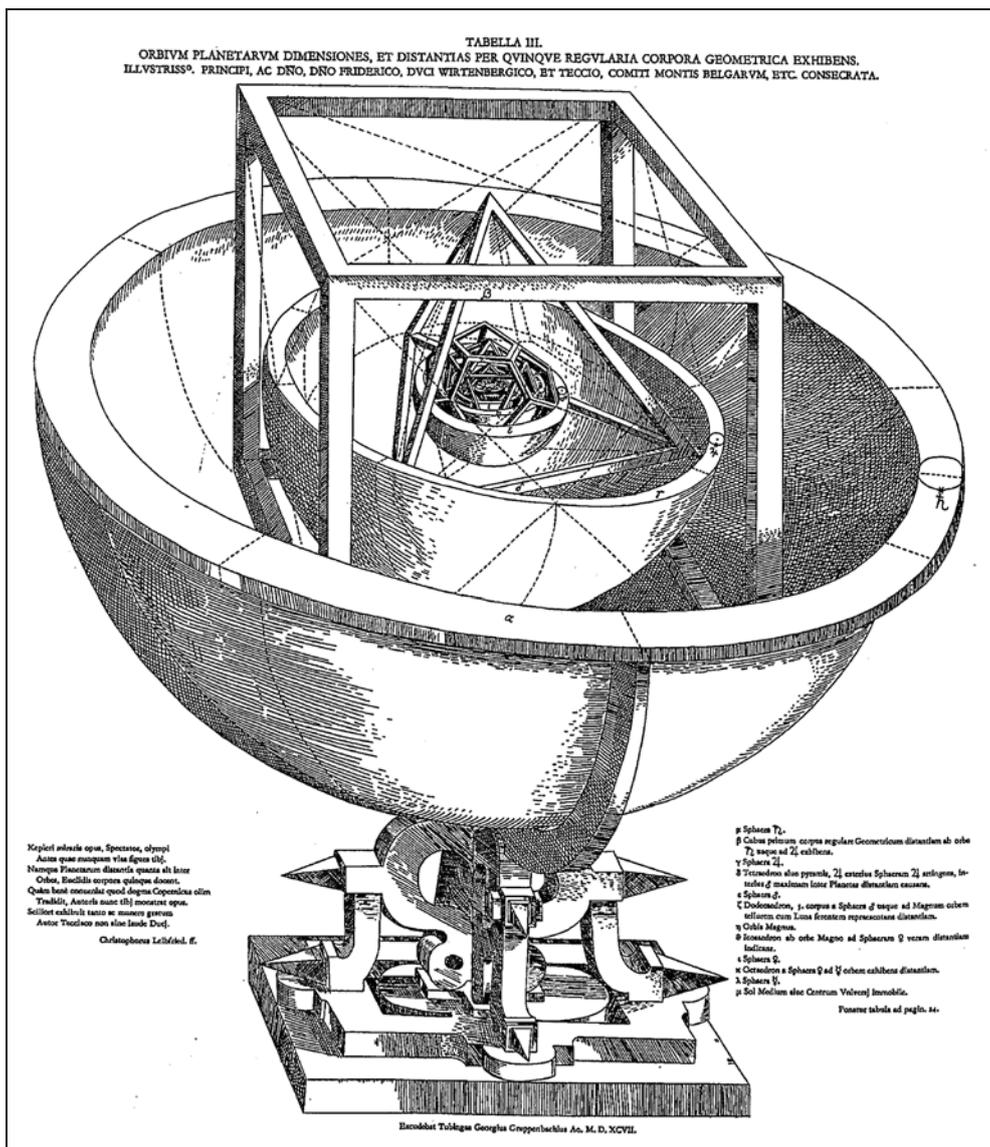
⁷⁶ Vollständiger Titel: *Ioannis Keplleri Harmonices mundi libri V.*

⁷⁷ Abb. aus Kepler, *Weltharmonik*, V. Buch, Kap. III.

⁷⁸ Vollständiger Titel: *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium Cosmographicum, de admirabili proportione orbium coelestium, de que causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & proprijs, demonstratum, per quinque regularia corpora Geometrica.*

Wenn du aber ... Bedenken hast, ob meine Aufstellungen auch sicher sind ..., nun so mache dich endlich an das Buch selber und schau dir die Sache an ... Du wirst die alten Planeten finden, nur ein ganz klein wenig verrenkt, dafür aber durch die ... von ebenen Flächen begrenzten Körper so gut befestigt, daß du einem Bauern, der dich fragt, an welchem Haken denn der Himmel aufgehängt ist, daß er nicht einfällt, zu antworten vermagst. Gehab dich wohl!

Das vollständige Planetensystem stellt Kepler in einem weiteren Kupferstich dar, der sich an der Planetensphäre orientiert, die Kaiser Karl V. sich von dem Mathematiker F. Turrianus aus Cremona hatte fertigen lassen.



Das Keplersche Planetensystem aus: *Mysterium Cosmographicum* 1596

Eine ähnliche Planetensphäre plante Kepler als kunstvolles Modell aus Edelmetall herstellen zu lassen. Er wandte sich dazu an seinen Landesherrn Herzog Friedrich von Württemberg: „Demnach der Allmächtige verschinen Sommer nach langwürriger

ungesparter mühe und Fleiß mir ein Hauptinventum in der Astronomie geoffenbaret: Wie solliches Ich in ein besonderm Tractätl ausgeführt und alberait zu publicieren ich willens; Auch das ganze werk und die demonstration des fürnemsten intenti füglich und zürlich in einen Credenzbecher, dessen Diameter einen Werkschub⁷⁹ hielte, möchte gebracht werden: wölliches dann ein recht eigentlich Ebenbild der Welt und Muster der Erschaffung, so weit menschliche Vernunft raiche, und dergleichen zuvor nie von keinem Menschen gesehen noch gehört worde, seyn und heißen möchte ...“⁸⁰ Trotz jahrelanger Bemühungen und intensiver Briefwechsel ließ sich dieser Plan nicht verwirklichen.

Keplers astrologische Folgerungen

Aus Gestalt und Anordnung der Platonischen Körper bestimmt Kepler auch den „Charakter“ der ihnen zugeordneten Planeten, also die astrologischen Eigenschaften und die Fähigkeiten Einfluß auf die Menschen zu nehmen, in deren „Nativität“⁸¹ dieser Planet als Aszendent steht:⁸²

Wenn man den Planeten, die die Erdbahn umkreisen, jene Körper zuordnet, die ihrer Bahn umbeschrieben sind, den Planeten aber, die von der Erdbahn umschlossen werden, jene Körper zuweist, die ihnen umbeschrieben sind, was meines Erachtens mit bestem Grund geschehen kann, so kommt

- auf den Saturn	der Würfel,
- auf den Jupiter	die Pyramide,
- auf den Mars	das Dodekaeder,
- auf die Venus	das Ikosaeder,
- auf den Merkur	das Oktaeder.

Die Erde, die nur Grenze ist, wird keiner der beiden Reihen zugeordnet. Auch Sonne und Mond trennen die Astrologen weit von den fünf anderen Gestirnen, so daß ... die Zahl der Körper schön mit den fünf Planeten übereinstimmt. ...

Da Jupiter, Venus und Merkur (ich nenne den Planeten statt des Körpers) dieselben Seitenflächen besitzen, erhalten wir einen Grund für ihre Freundschaft. Denn dem Dreieck wohnt vorzugsweise Beständigkeit inne. ... Fragen wir uns darum nicht mehr verwundert, was denn der harte und feurige Mars Reizendes an sich habe, dessentwegen die holdselige Venus ihren Ebegatten betrog und sich mit Mars einließ. ...

Der Saturn ist einsam und liebt die Einsamkeit, genau so wie seine Rechtwinkligkeit nicht die geringste Abweichung von der Gleichheit zuläßt, die ihm seine Beständigkeit rauben könnte. Jupiter dagegen hat aus der unendlich großen Zahl spitzer Winkel einen erhalten und ist dadurch leutselig geworden, jedoch nur mäßig, nicht allzusehr. Er ist nämlich der Urheber der

⁷⁹ Etwa 33 cm.

⁸⁰ Kepler, *Weltgeheimnis*, S. 13.

⁸¹ Geburtshoroskop.

⁸² Kepler, *Weltgeheimnis*, 9. Kapitel.

wohlgesitteten Freundschaftsverhältnisse. So sind auch Mars und Venus leutselig geworden, aber allzusehr; denn ihr stumpfer und ausladender Winkel verrät Maßlosigkeit. Merkur ist wegen seiner Winkel von derselben Natur wie Saturn und Jupiter. Es lieben auch die Gelehrten die Einsamkeit, ohne jedoch menschenfeindlich zu sein. ...

Die Ruhe und Beständigkeit zunächst des Jupiter, dann des Saturn und schließlich des Mars rührt von der kleinen Zahl der Seitenflächen her, die Unruhe und Leichtfertigkeit von Venus und Mars dagegen von deren Vielzahl. Das Veränderliche und Wandelbare ist immer die Frau. Der der Venus entsprechende Körper ist unter allen am veränderlichsten und am leichtesten wälzbar. Es liegen hier Stufen vor; darum steht Merkur in der Mitte, seine Vertrauenswürdigkeit ist mittelmäßig. ...

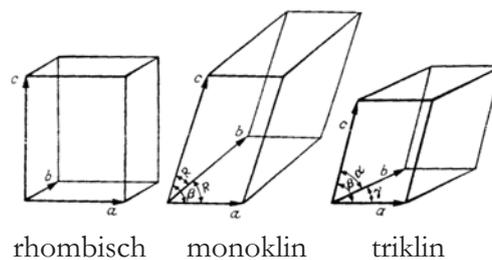
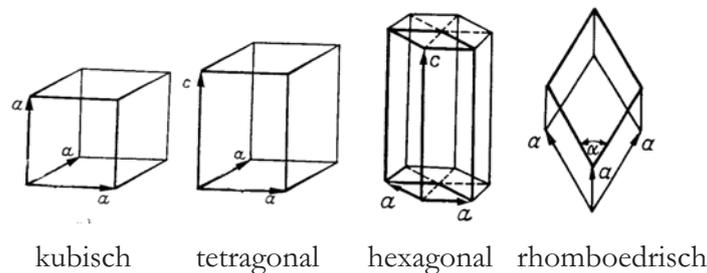
Mars bringt mit vielen Kanten eine kleinere Anzahl von Seitenflächen zuwege, Venus mit ebenso vielen Kanten eine größere Anzahl. Dem Mars sind auch viele Wagnisse fehlgeschlagen; die Venus kommt ihm an Wagnissen gleich, aber sie hat mehr Glück dabei. Das darf uns nicht wundernehmen. Denn es lassen sich leichter Reigentänze veranstalten als Kriege, und es war angemessen, schneller Liebe ans Ziel gelangen zu lassen als Haß; denn dieser rafft die Menschen dahin, jener erzeugt sie.

Die Platonischen Körper in der Mineralogie

Kristalle und ihre Klassifizierung

Das äußere Erscheinungsbild natürlich gewachsener oder künstlich gezüchteter Kristalle hängt von ihren mikroskopischen Feinstrukturen sowie von den physikalisch-chemischen Umfeldbedingungen während der eigentlichen Kristallbildung ab. Das Muster, nach dem im Einzelfall die Atome im sogenannten „Kristallgitter“ angeordnet sind, entscheidet darüber, welche Möglichkeiten an äußeren Formen für eine bestimmte Kristallsubstanz überhaupt bestehen. Die anorganische Kristallchemie unterscheidet hierbei genau sieben unterschiedliche sogenannte „Gittersysteme“:

- (1) das kubische oder reguläre Gittersystem,
- (2) das tetragonale Gittersystem,
- (3) das hexagonale Gittersystem,
- (4) das rhomboedrische Gittersystem,
- (5) das rhombische Gittersystem,
- (6) das monokline Gittersystem und
- (7) das triklin Gittersystem.⁸³



Die sieben Gittersysteme

Innerhalb eines jeden solchen Gittersystems kann wiederum eine große Vielfalt von Kristallformen entstehen, die für das jeweilige Gittersystem spezifisch und keinesfalls in einem der anderen Gittersysteme anzutreffen sind.

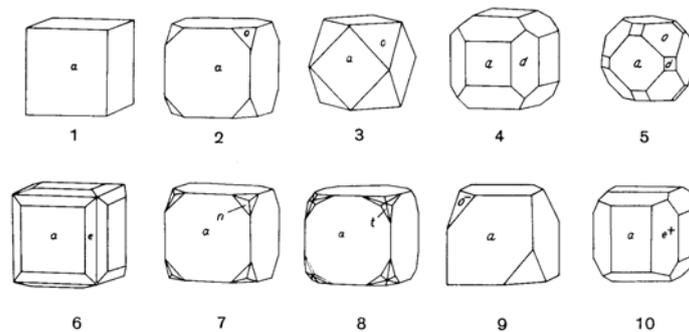
⁸³ Obwohl die Bezeichnungen der Gittersysteme es nahelegen könnten, haben sie nichts mit den Platonischen Körpern zu tun.

Welche konkrete Kristallform dann ein Mineral tatsächlich annimmt, hängt von Faktoren während des Kristallisationsprozesses⁸⁴ ab, wie

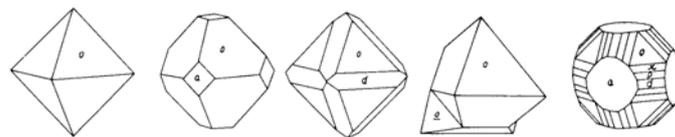
- der chemischen Zusammensetzung der Kristallsubstanz,
- den chemischen Stoffen, die sich zwar in der Kristallschmelze oder –lösung befinden, aber nicht in die entstehenden Kristalle aufgenommen werden,
- dem Druck, unter dem die Kristallisation stattfindet,
- die Temperaturen während der Kristallbildung

und vielem anderen mehr.

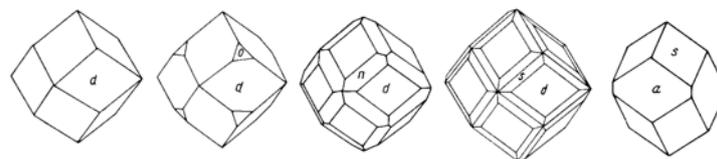
Die folgenden Abbildungen zeigen als Beispiel, in welcher Formenvielfalt Minerale in der kubischen Gitterklasse auskristallisieren können:⁸⁵



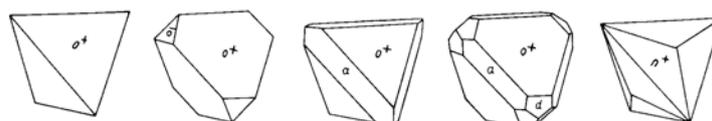
hexaedrischer Habitus



oktaedrischer Habitus



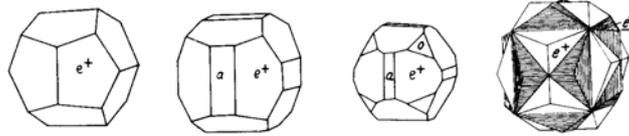
rhombendodekaedrischer Habitus



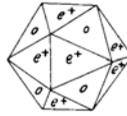
tetraedrischer Habitus

⁸⁴ Die Phase der Kristallisation kann durchaus Millionen von Jahren andauern, zwischendurch zum Stillstand kommen und erneut wieder einsetzen. Vgl. z.B. Phantomquarze!

⁸⁵ Die Kristallformen von pseudokubischem Habitus sind hierbei nicht berücksichtigt.



pentagondodekaedrischer Habitus



ikosaedrischer Habitus

Minerale, die die Form Platonischer Körper annehmen,⁸⁶ sind nur im kubischen Gittersystem anzutreffen⁸⁷ und kristallisieren oft in mehreren unterschiedlichen Formen aus. Erstaunlich ist dabei, daß diese bei vielen Mineralen nur in den Unterklassen der einander polar zugeordneten Platonischen Kristallformen auftreten.

So kennt man in Gestalt Platonischer Körper die folgenden Mineralien:⁸⁸

Tetraeder	Zinkblende, Antimonfahlerz, Silberfahlerz, Boracit
Würfel	Fluorit, Pyrit, Diamant, Steinsalz
Oktaeder	Fluorit, Pyrit, Diamant, Steinsalz (selten), Spinell
Ikosaeder	Pyrit, Kobaltglanz
Dodekaeder	Pyrit, Kobaltglanz

⁸⁶ Natürlich gewachsene Kristalle weisen nie exakt, sondern immer nur annähernd die Form Platonischer oder Archimedischer Körper auf.

⁸⁷ Das Gittersystem heißt aus diesem Grunde auch das „reguläre“.

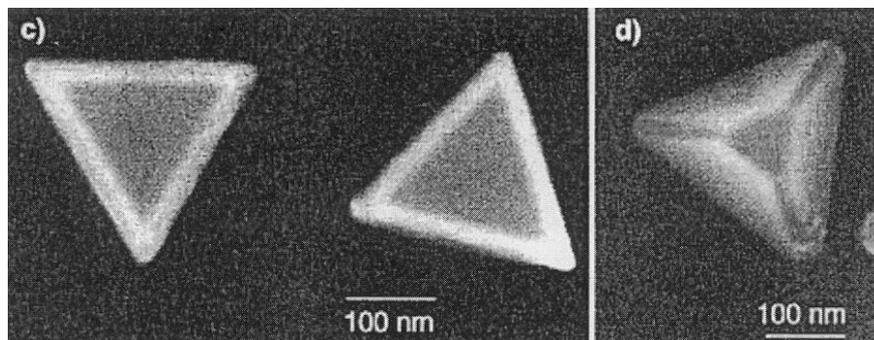
⁸⁸ v. Philipsborn, Tafeln zum Bestimmen der Minerale.

Die Goldkristallisationen von Berkeley

Wissenschaftler der University of California (Berkeley) untersuchten in den vergangenen Jahren, inwieweit sich die Ausformung künstlich gezüchteter Kristalle durch unterschiedliche Einstellung der chemisch-physikalischen Bedingungen während des Kristallisationsprozesses gezielt beeinflussen lassen. Nachdem sie in den Jahren 1999 bis 2002 erkannt hatten, wie man Silber- und Platinkristalle planmäßig in prismen-, stab- und drahtartiger Form erzeugen kann, gelang es ihnen im Jahre 2004, aus sogenannten „Mutterlösungen“ mikroskopisch kleine Goldkristalle in Form von Platonischen Körpern zu züchten.⁸⁹

Sobald sie der Goldlösung ein bestimmtes Polymer (PVP)⁹⁰ hinzufügen, von dem bekannt ist, daß es die aktuelle Gestalt von Kristallen während ihres Entstehungsprozesses bestimmt, bilden sich in Minutenschnelle kleinste Goldpartikel in regelmäßigen Formen. Sie weisen fast keine Gitterstörungen auf, d.h. ihre Kristallstruktur ist nahezu perfekt. Ihre Größe liegt im Bereich von 100 nm bis 300 nm.⁹¹

Mit elektronenmikroskopischen Verfahren konnte man feststellen, daß bei einem bestimmten Verhältnis der Goldkonzentration zum PVP in der Mutterlösung etwa 70 % der Kristalle als Tetraeder in ziemlich einheitlicher Größe von etwa 200 nm entstehen. Es fehlt ihnen allerdings die „obere“ Spitze, sie sind damit nicht vollständig ausgebildet.



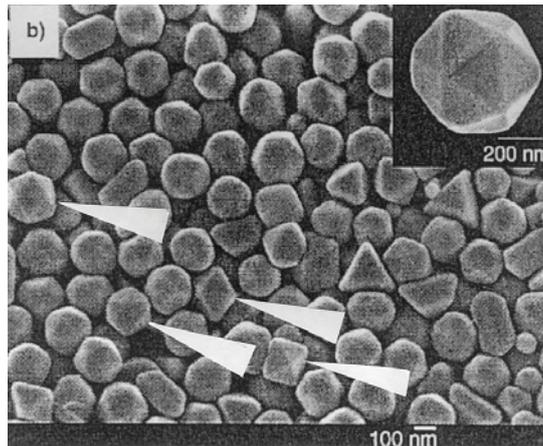
Die Gold-Tetraeder ohne Spitze

Führt man denselben Prozeß mit einer um 20 % reduzierten Goldkonzentration durch, so bildet sich ein Gemenge aus Ikosaedern (etwa 90 %) von fast perfekter Gestalt, aber unterschiedlichen Größen, und von Oktaedern (weniger als 10 %).

⁸⁹ Kim, Platonic Gold Nanocrystals.

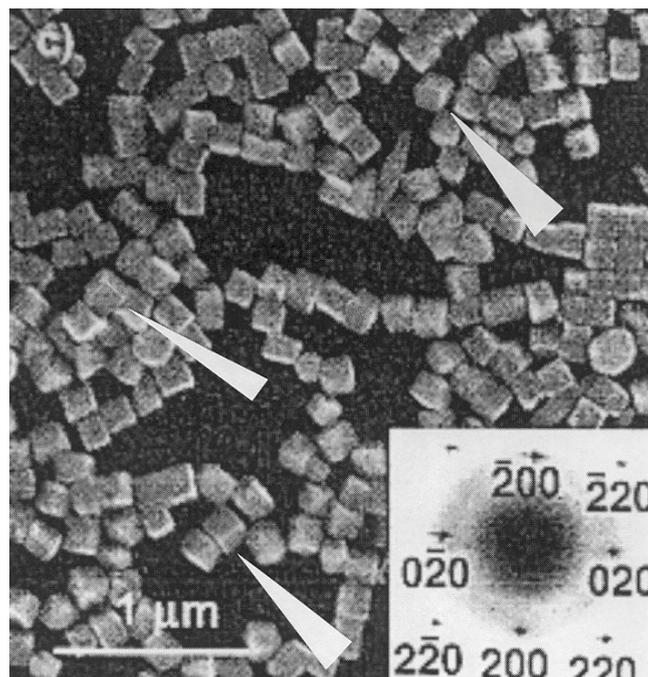
⁹⁰ PVP = Polyvinylpyrolidon.

⁹¹ 1 Nanometer (nm) = 1 Millionstel eines Millimeters.



Gold-Ikosaeder (links und rechts oben)
und Gold-Oktaeder (unten Mitte)

Fügt man hingegen rechtzeitig, bevor die Kristallisation einsetzt, „fremde“ Ionen (hier Silbernitrat) hinzu, so kristallisieren Würfel von etwa 150 nm Kantenlänge aus.



Gold-Würfel

Inzwischen glauben die Wissenschaftler zu wissen, mit welchen Zusätzen zur Goldlösung man die Tetraeder zur vollen Ausbildung bringen kann.

Somit steht nur noch die künstliche Züchtung von Gold-Dodekaedern aus, um den vollständigen Satz der Platonischen Körper als Goldkristalle zu erhalten.

Literaturverzeichnis

- Adam, Paul und Wyss, Arnold: Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde, Bern und Stuttgart 1994.
- Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr., Leipzig 1907.
- Ceram, C. W.: Götter, Gräber und Gelehrte, Stuttgart Hamburg 1964.
- Coxeter, Harold Scott Macdonald: Regular complex polytopes, Cambridge University Press 1974
- Critchlow, Keith: Time stands still, New light on megalithic science, London 1979.
(Cave! Das Buch enthält keinerlei Quellenangaben oder Nachweise.)
- Dictionary of Scientific Biography, New York 1970, 1971, 1972, 1973, 1975, 1976, 1994.
- Dürer, Albrecht 1471-1971, Katalog der Ausstellung des Germanischen Nationalmuseums, München 1971.
- Encyclopaedia of Mathematics, Dordrecht/Boston/London 1991.
- Euklid: Die Elemente, Buch I – XIII, herausgegeben und ins Deutsche übersetzt von Clemens Thaer, Darmstadt 1962.
- Faust, Sabine: Zwei neue Pentagondodekaeder aus Trier, in: Funde und Ausgrabungen im Bezirk Trier, Nr. 35 2003, S. 31-35.
- Gerlach, Walther: Johannes Kepler. In: Die Großen, Leben und Leistung der sechshundert bedeutendsten Persönlichkeiten unserer Welt, Zürich 1995.
- Graf, Hermann: Kupferstiche eines Speyerer Kunstschlösslers erinnern an alte Probleme um die regulären und halbbregulären Körper. In: Pfälzer Heimat Jg. 3, (Kaiserslautern) 1952.
- Guggenberger, Michael: Etwas Gewisses hievon zu bestimmen waere ein Gewagtes. 260 Jahre Dodekaeder-Forschung. In: Veröffentlichungen des Tiroler Landesmuseums Ferdinandeum, Innsbruck 2000, S. 67-84.
- Harburger, W.: Johannes Keplers Kosmische Harmonie, Leipzig 1925.
- Heiberg, I.L., Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum, München 1925.
- Iamblichos, De vita pythagorica liber, Leipzig 1937.
- Kepler, Johannes: Mysterium Cosmographicum Das Weltgeheimnis, übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, Augsburg 1923.
- Kepler, Johannes: Weltharmonik, übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, München-Berlin 1939.
- Kim, Franklin u.a.: Platonic Gold Nanocrystals. In: Angewandte Chemie, Bd. 116, S. 3759-3763.
- Kolling, Alfons: Die Römerstadt in Homburg-Schwarzenacker, Homburg-Saarpfalz 1993.
- Kolling, Alfons: Ein magischer Würfel. Zum Pentagon-Dodekaeder aus dem römischen Schwarzenacker. In: Saarheimat 28. Jg., 10/1984, Saarbrücken 1984.
- Krebs, Heinz: Grundzüge der anorganischen Kristallchemie, Stuttgart 1968.
- Lexikon der Mathematik in sechs Bänden, Heidelberg-Berlin, 2001, 2002.
- Lindemann, F.: Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen. Sitzungsberichte der mathem. physik. Klasse der k. bayerischen Akad. der Wissensch. (1897) XXVI, S. 625 ff.

- Nouwen, Robert: Les dodécaèdres gallo-romains ajouré et bouleté. Histoire et problèmes. In: Bulletin de l'Institut Archéologique Liégeois, Liège 1994.
- Pacioli, Fra Luca: De divina proportione, in: Fontes ambrosiani XXXI, Mailand 1956.
- v. Philipsborn, Hellmut: Tafeln zum Bestimmen der Minerale nach äußeren Kennzeichen, Stuttgart 1967.
- Piero della Francesca, Libellus de quinque corporibus regularibus, Florenz 1995.
- Piero della Francesca tra arte e scienza, Atti del Convegno Internazionale, Venezia 1996.
- Platon, Timaios, Übersetzung, Anmerkungen und Nachwort von Thomas Paulsen und Rudolf Rehn, Stuttgart 2003.
- Porphyrius: Philosophi Platonici, Leipzig, 1860.
- Sachs Eva: Die fünf Platonischen Körper. Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer, Philologische Untersuchungen, 24. Heft, Berlin 1917.
- Strauß, Heinz Artur: Der astrologische Gedanke in der deutschen Vergangenheit München und Berlin 1926.
- Sturm, Ambros: Geschichte der Mathematik bis zum Ausgange des 18. Jahrhunderts, Leipzig 1911.
- van der Waerden, Bartel Leendert: Die Pythagoreer, religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Zürich und München, 1979.
- van der Waerden, Bartel Leendert: Science Awakening, Groningen 1954.
- Zeller, Eduard: Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung, Erster Teil, Leipzig 1919.
- Zeuthen, H. G.: Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896.

Abbildungsnachweis

Bei Abbildungen, die aus Druckwerken übernommen wurden, wird lediglich der Name des Autors genannt. Der volle Titel des zugehörigen Druckwerks ist dem obigen Literaturverzeichnis zu entnehmen.

Archiv des Autors:

Abb. auf S. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 24, 29, 30, 32, 33, 35, 39, 40, 41, 44, 45, 46.

C. W. Ceram:

Abb. auf S. 23 unten.

Critchlow:

Abb. auf S. 11, 12, 13, 14, 16.

Faust:

Abb. auf S. 25.

Kim u.a.:

Abb. S. 47, 48.

Lindemann:

Abb. auf S. 15, 23 oben.

Nouwen:

Abb. auf S. 22