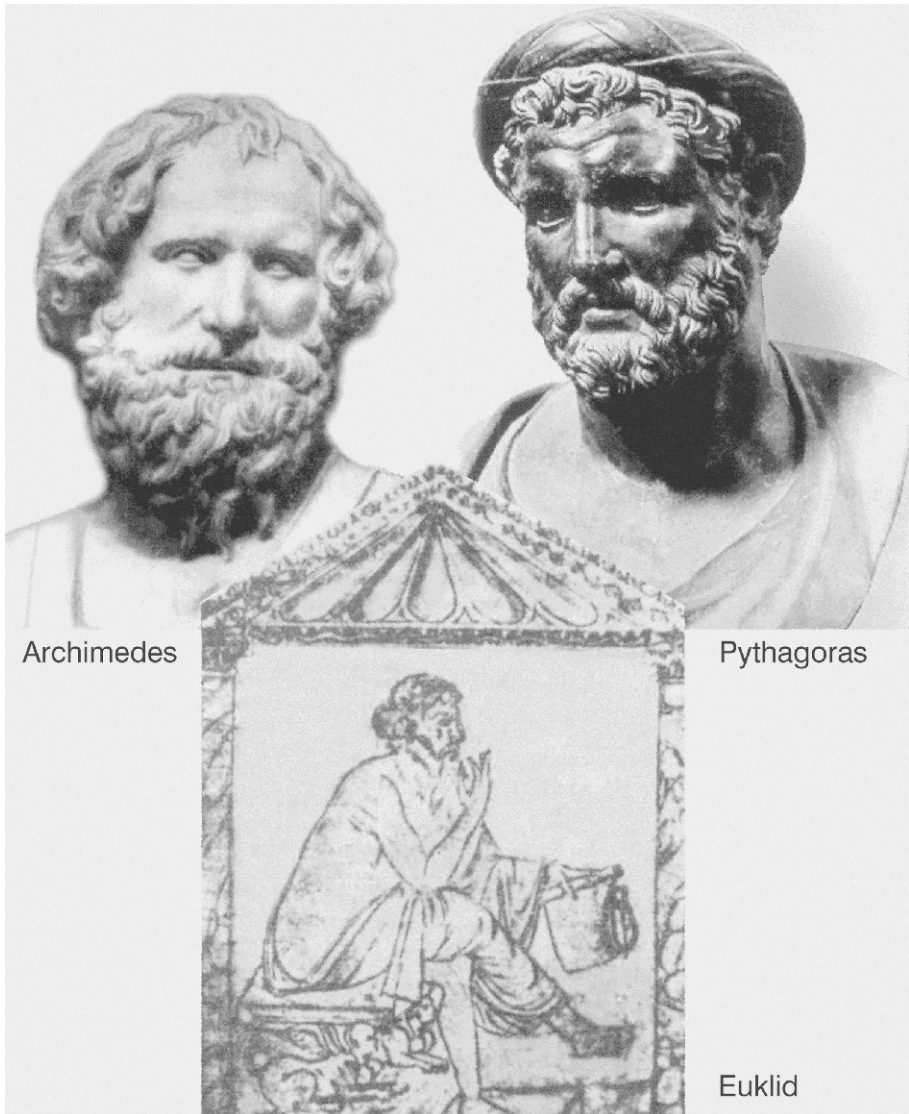


2 Geometrie in griechisch-hellenistischer Zeit und Spätantike



3./2. Jtd. um 1000 v. Chr. ~ 900	Herrschaft von Mykene über Peloponnes und Kreta Dorische Wanderung Griechen besiedeln die Inseln der Ägäis und die Westküste Kleinasiens	Minoische und mykenische Kultur Geometrische Kunst Griechen übernehmen das phönizische Alphabet
8. – 6. Jh. ca. 600 – ca. 450	Gründung griechischer Kolonien in Sizilien, Unteritalien, Libyen und am Schwarzen Meer Ionische Periode	Archaische Kunst, monumentale Plastik und Architektur, Vasenmalerei, Epen des Homer, Leergedichte des Hesiod Naturphilosophie: Thales, Anaximandros, Hekataios, Anaximenes
490 490 – 448	Schlacht bei Marathon Perserkriege	Pythagoras, Heraklit Parmenides, Empedokles, Anaxagoras
ca. 450 – 300 462 – 429 431 – 404	Athenische Periode Höchste Blüte Athens unter Perikles Peloponnesischer Krieg zwischen Athen und Sparta	Sophisten Sokrates, Platon, Tragödien des Aischylos, Sophokles, Euripides Entstehung der dorischen, phrygischen und lydischen Tonarten in der Musik
387	Gründung der Akademie durch Platon	Bau der Akropolis von Athen, klassische Skulpturen von Polyklet und Phidias
ab 338 335	Griechenland unter makedonischer Herrschaft Gründung des Lyzeums durch Aristoteles	
334 – 323	Kriegszüge Alexanders d. Gr. nach Persien, Ägypten, Indien	Hippokrates von Kos Begründer der wissenschaftlichen Medizin
311	Teilung des Alexander-Reiches	Durch Verschmelzung griechischer und orientalischer Kulturen bildet sich die sog. hellenistische Kultur
ca. 300 – ca. 150	Hellenistische (alexandrinsche) Periode	Philosophie der Stoa, der Epikureer, der Skeptiker: Leergedichte und Epigramme als Formen der Dichtkunst. Barocke Spätzeit griechischer Kunst. Mathematische und naturwissenschaftliche Erkenntnisse von Euklid, Aristarch, Archimedes, Apollonios von Perge.

2.0 Einführung

Die Griechen werden allgemein als die Begründer der Wissenschaft von der Natur, also der rationalen, auf Prinzipien beruhenden und in Systemform vorgebrachten Erklärung der Naturerscheinungen angesehen. Zugleich sind sie diejenigen, die die (teilweise aus den orientalischen Kulturen) überlieferten Regeln und Vorschriften zum Zählen, Messen und Auflösen von Gleichungen mit Hilfe der von ihnen entwickelten Logik systematisierten, begründeten und zu einem Theoriegebäude zusammenfaßten und damit zu den Urhebern der wissenschaftlichen Mathematik wurden.

Ende des 2., Anfang des 1. Jtds. v. Chr. hatte mit der dorischen Wanderung die Besitznahme griechischer Gebiete (insbes. des Peloponnes) durch die Dorer stattgefunden, wohl als Folge des Untergangs der mykenischen, kulturell hoch entwickelten und straff verwalteten Staatenwelt. Von Nordwesten, aus dem albanisch-dalmatinischen Küstengebiet her, wo sie ursprünglich ansässig waren, drangen die Dorer immer weiter vor und kolonisierten das seit einem Jahrtausend von den Achäern besiedelte griechische Mutterland. Die Urbevölkerung wurde überlagert oder zog sich in der sog. ionischen Wanderung auf die Inseln und die kleinasiatische Westküste zurück. So entstand eine Vielfalt von Stämmen und Völkern in einem auch geologisch-geographisch in kleine und kleinste Gebiete gegliederten Raum, die jeweils ihre eigene Entwicklung durchliefen. Politisch wie kulturell wurde die Struktur der Stadtstaaten (Poleis) bestimmend.

Vor allem in den Pflanzstädten des kleinasiatischen Milet an der Südküste des Schwarzen Meeres und im Nildelta, wo zentral organisierte Großreiche lagen, ließen sich die Kolonisten als Bauern und Händler nieder und kamen so geistig wie kulturell unter die verschiedenartigsten orientalischen Einflüsse. Sie lernten Sammlungen von Beobachtungen und Verhaltensregeln kennen, die ihnen dann den Stoff für die allmähliche Ausgestaltung des wissenschaftlichen Denkens boten (vgl. Bd. 1, Abschnitte 4.0–4.3).

2.1 Ionische Periode

2.1.1 Die frühen Naturphilosophen

Als Beginn der „Entdeckung des Geistes“ (Titel eines Buches des klassischen Philologen Bruno Snell [Snell 1946]) wird gewöhnlich die ionische Periode bezeichnet (ca. 600 - ca. 450 v. Chr.), auf die um die Mitte des 5. Jhs. die athenische Periode folgte. In der ionischen Periode wurde die Feudalherrschaft der Aristokratie durch die Polis-(Stadt-)struktur abgelöst. Neben den zentra-

listisch regierten orientalischen Großreichen erblühten die selbständigen ionischen Handelsstädte. Bedingt durch das praktische Denken der Kaufleute und die Kleinräumigkeit der politischen Struktur und Verwaltung, nahmen die Bürger größeren Anteil am öffentlichen Leben. Die Städte entwickelten sich zu Zentren der klassischen griechischen Kultur und Wissenschaft. Auch die Randgebiete des Mittelmeeres und des Schwarzen Meeres wurden infolge der Gründung von Pflanzstädten hellenisiert. Der ionischen Periode gehören vor allem die ersten großen Naturphilosophen an: Thales, Anaximandros und Anaximenes. In dieser Zeit, in der sich das europäische Denken herausbildete, entstand in enger Verbindung mit der Entwicklung der Logik auch das deduktive Vorgehen in der Mathematik.

Das fast völlige Fehlen unmittelbarer Quellen verhindert eine genaue Rekonstruktion dieses einmaligen Vorganges, zumal die uns überlieferten Berichte aus späterer Zeit oft aus einer bestimmten Sicht geschrieben und daher tendenziell gefärbt sind. Proklos (5. Jh. n. Chr.) berichtet in seinem Euklid-Kommentar unter Benutzung historischer Mitteilungen des Aristoteles-Schülers Eudemos (um 320 v. Chr.) an verschiedenen Stellen von Thales von Milet (um 600 v. Chr.). Er sei nicht nur der erste griechische Philosoph, sondern auch der erste Mathematiker gewesen. Er habe die Mathematik von Ägypten nach Griechenland gebracht und selbst viele Entdeckungen gemacht. Laut Herodot, der ihm zeitlich am nächsten stand, war Thales von phönizischer Abstammung — etwa 300 Jahre vor seiner Lebenszeit hatten die Griechen das phönizische Alphabet übernommen. Astronomische Kenntnisse der Babylonier dürften Thales die Vorhersage einer Sonnenfinsternis ermöglicht haben, die dann 585 während der Schlacht zwischen den Lydern und Persern am Halys eintraf und zum Abbruch des Kampfes führte.

Etwas jünger als Thales war der bis zur Mitte des 6. vorchristlichen Jahrhunderts wirkende ionische Naturphilosoph Anaximandros aus Milet. Er soll den Gnomon (ein aus einem senkrechten Stab, der auf einer horizontalen Platte befestigt ist, bestehendes Instrument zur Messung des Sonnenschattens) aus Babylon nach Griechenland gebracht haben. Auch entwickelte Anaximandros ein mathematisch gegliedertes Weltsystem: die Erde, im Zentrum der Welt befindlich, habe die Gestalt einer Säulentrommel, deren Höhe ein Drittel ihres Durchmessers betrage; Fixsternhimmel, Mond und Sonne umkreisen die Erde wie sich drehende Reifen in den Abständen von $1 \cdot 3 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 3$, $3 \cdot 3 \cdot 3$ Erddurchmessern (Mond und Sonne also außerhalb der Fixsternsphäre!). Man erkennt, wie geometrische, durch elementare Zahlenverhältnisse bestimmte Ordnungsvorstellungen dieses frühe Weltbild prägen. Geometrie und Symmetrie dienen der Veranschaulichung der die Natur durchziehenden Gesetzmäßigkeiten.

Hier, am Beginn der griechischen Naturwissenschaft, steht den frühen Denkern noch keine ausgebildete mathematische Theorie zur Verfügung. Dennoch greifen sie quasi auf deren erste Bausteine zurück, wenn sie meinen, anhand einfacher Zahlengesetzmäßigkeiten und elementarer geometrischer Figuren ihre Weltvorstellung verdeutlichen zu können. Fritz Krafft vertritt in seiner lesenswerten Darstellung der antiken Wissenschaft [Kraft 1971, S. 200] die Ansicht, man könne für die Zeit des 6. und frühen 5. Jahrhunderts „die Mathematik noch nicht als Hilfsmittel des Erkennens der Natur und ihrer Formen bezeichnen . . . , weil der Eigenbereich der Mathematik als einer nur im Geiste des Menschen entstandenen und bestehenden Wissenschaft erst . . . seit Mitte des 5. Jahrhunderts erkannt und entdeckt wurde.“ Damit setzt er implizit als „Mathematik“ eine vom menschlichen Geist schon weit ausgebildete Theorie voraus, die sich als „Hilfsmittel“ einsetzen läßt. Die Entstehung dieses „Eigenbereichs der Mathematik“ geschah, wie im Verlauf dieser Geschichte der Geometrie noch mehrfach deutlich werden wird, selbst in enger Beziehung zur äußeren Wirklichkeit: das Modell der Anaximandros erlaubt uns einen Blick in die Frühphase dieser Entwicklung. Die Analyse von in der Natur vorkommenden Strukturen führte dann immer wieder zu Ausbildung neuer mathematischer Theorien, die ihrerseits wieder zur Erklärung oder Veranschaulichung weiterer Natur- (später auch ökonomischer, gesellschaftlicher und anderer) Phänomene herangezogen wurden. Die wechselseitige Verflechtung von empirischer Beobachtung und wissenschaftlicher Theoriebildung ist ein Charakteristikum nicht nur der Naturwissenschaften, sondern auch der geschichtlichen Entwicklung des mathematischen Denkens. Damit soll nicht geleugnet werden, daß es immer wieder Phasen gab, in denen die Anstöße zum Ausbau der mathematischen Theorien aus der Mathematik selbst kamen, innermathematische Impulse also bestimmend waren, während in anderen Fällen externe Anforderungen zu Neuentwicklungen Anlaß gaben.

Doch zurück zu den frühen Naturphilosophen, die oft auch unter dem Namen der Vorsokratiker zusammengefaßt werden. Der Generation nach Anaximandros gehörte Hekataios von Milet an (geboren etwa 560). Eine große Reise führte ihn nach Ägypten, andere in das persische Reich und zum Skythenland an der Nordküste des Schwarzen Meeres. Schriftliche Zeugnisse durch eigene Erfahrungen ergänzend, entwarf Hekataios (im Anschluß an Anaximandros, dem auch das erste Erdbild zugeschrieben wird) eine Karte der damals bekannten Welt (Oikumene). Da Hekataios über viele Gegenden nur sehr vage Informationen besaß, war er gezwungen, eine Schematisierung vorzunehmen. Charakteristisch ist dabei, wie er sich dazu geometrischer Vorstellungen bediente. Die als Kreisscheibe vorgestellte Erde teilte er durch einen Durchmes-

ser in zwei Halbkreise. Der nördliche stellte Europa dar, der südliche wurde durch den vom Mittelmeer bis in den südlichen Okeanos reichenden Nil in zwei gleichgroße Viertel zerlegt: das westliche zeigt Libya (Name für den damals bekannten Teil Afrikas), das östliche Asia. Der Geschichtsschreiber Herodot bemerkte dazu etwa 150 Jahre später:

„Ich muß lachen, wenn ich so manche Leute Erdkarten zeichnen sehe, die doch die Gestalt der Erde gar nicht richtig zu erklären wissen. Sie zeichnen den Okeanos rund um die Erde herum fließend und so regelmäßig wie einen Kreis [Krafft 1971, S. 175].“

Diese OT-Form (worin der umfassende Kreis, das O, den kreisförmig gezeichneten Ozean darstellt, der horizontale Querbalken des T in der Regel rechts den Nil und links den Bosphorus und den Eingang zum Schwarzen Meer, der Stamm des T das Mittelmeer, vgl. Abb. 2.1.1) wurde bis zum ausgehenden Mittelalter bestimmend für die Gestaltung von Erdkarten im europäischen Bereich. (Zur Tradition der Ptolemaios-Karten vgl. Abschnitt 5.2.)

Oberstes Ziel dieser Art von Darstellung ist nicht die Detailtreue, wie wir sie heute von geographischen Karten erwarten, sondern das Bestreben, das Prinzipielle und Allgemeine in einprägsamer Form vor Augen zu führen. In ähnlich geometrisierender Weise beschrieb Hekataios das Skythenland und den Norden Libyens als durch Parallelstreifen unterteilte Rechtecke, in denen die verschiedenen Volksstämme leben.

2.1.2 Thales

Thales wird seit dem 4. Jh. v. Chr. als einer der Sieben Weisen bezeichnet. Von den Aussagen, die ihm als Mathematiker zugesprochen werden, hat die ersten vier der spätantike Neuplatoniker Proklos überliefert, der sich — wie schon gesagt — indirekt auf die nicht erhaltene Mathematikgeschichte des Eudemos von Rhodos stützen konnte. In Kurzform werden diese Sätze oft sinngemäß wie folgt wiedergegeben:

1. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich (Euklid, Elemente I,5).
2. Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich (Euklid I,15).
3. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt, oder anders: Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein (Euklid I, 26).
4. Der Durchmesser halbiert den Kreis.

Hören wir zum Vergleich, in welcher Form z. B. der erste und dritte Satz bei Proklos formuliert sind:

„Heil dem alten Thales, dem Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems! Denn man sagt, er habe als erster erkannt und ausgesprochen, daß in jedem gleichschenkeligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind, habe aber in altertümlicher Weise für „gleich“ die Bezeichnung „ähnlich“ gebraucht [Proklos 1945, 341-42]“

und

„Eudemos aber führt in seiner „Geschichte der Geometrie“ diesen Lehrsatz auf Thales zurück. Denn bei der Art und Weise, auf die er die Entfernung der Schiffe auf hoher See bestimmt haben soll, erklärt Eudemos die Heranziehung desselben als unerlässlich [Proklos 1945, 409].“

Man bemerkt sofort, daß hier meistens von elementaren Symmetriebeziehungen die Rede ist. Daß Thales diese als erster „gefunden“ oder ausgesprochen haben soll, kann höchstens bedeuten, er sei der erste Grieche gewesen, der diese Aussagen explizit formulierte. Man hat auch daran gedacht, es könne gemeint sein, er habe erste Begründungen für ihre Richtigkeit vorgebracht, also Beweisüberlegungen für diese Sätze angestellt. Auf wie unsicheren Füßen alle solche Vermutungen stehen, zeigt das zweite der beiden Proklos-Zitate. Darin wird Thales die Kenntnis eines Verfahrens zur Bestimmung der Entfernung von Schiffen auf hoher See zugeschrieben (vgl. Aufgabe 2.1.1). Dies muß einen geometrischen Hintergrund gehabt haben, woraus Eudemos folgerte, der dritte Satz sei auf Thales zurückzuführen. Doch das Verfahren könnte dieser aus Ägypten mitgebracht haben.

Dazu kommen zwei weitere, miteinander zusammenhängende Sätze, wovon der zweite heute vor allem mit dem Namen des Thales in Verbindung gebracht wird:

5. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander.

6. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.

Der letztgenannte Satz, als Satz des Thales bekannt, ist durch die Geschichtsschreiberin Pamphile (1. Jh. n. Chr.) überliefert, wie Diogenes Laertius (3. Jh.) berichtet. Zum Dank für diese grundlegende Einsicht soll Thales den Göttern einen Ochsen geopfert haben!

Wie wir schon aus den Abschnitten über die vorgriechische Mathematik wissen, gehören zu den ältesten Elementen der Geometrie (neben dem Punkt) die

gerade Linie und der Kreis. Dazu kommt der bei Thales erstmals auftretende Begriff des Winkels, entstehend durch den Schnitt zweier Geraden. Sehr früh muß man auch erkannt haben, daß unter allen Winkeln der rechte Winkel ($R = 90^\circ$) eine besondere Stellung einnimmt. Er erscheint immer dann, wenn sich zwei Geraden symmetrisch schneiden. Die zugehörige Konstruktion steht in EUKLIDS *Elementen* I, 9–11. Im Prinzip erhält man sie fast spielerisch, wenn man von einer gegebenen Strecke ausgeht und mit dem Zirkel bei gleicher Öffnung von deren Endpunkten aus zwei Kreise zieht (die Verbindungslinie der beiden Kreisschnittpunkte steht „aus Symmetriegründen“ senkrecht auf der Ausgangsstrecke):

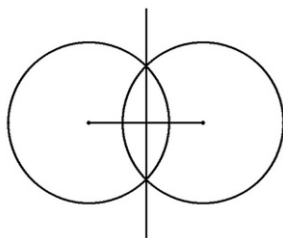


Abb. 2.1.2 Konstruktion eines rechten Winkels

Jetzt folgt leicht die Konstruktion eines Rechtecks mit vier rechten Winkeln und die Einsicht, daß jeweils gegenüberliegende Seiten gleich lang sein müssen. Zeichnet man noch die beiden Diagonalen ein, so sind auch diese gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Also wird ein um ihren Schnittpunkt durch eine Ecke des Rechtecks gezogener Kreis auch durch die drei anderen Ecken gehen:

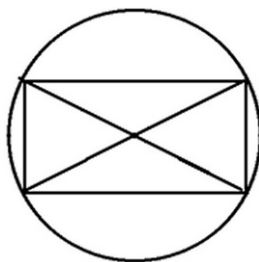


Abb. 2.1.3 Rechteck mit Umkreis

An dieser Figur lassen sich fast alle mit dem Namen von THALES in Verbindung gebrachten Aussagen demonstrieren.

Die Gleichheit der Scheitelwinkel gemäß Aussage 2 wäre auf die Gleichheit der zugehörigen Kreisbögen zurückgeführt, die ihrerseits durch die Gleichheit gegenüberliegender Seiten des Rechtecks bedingt ist und die Gleichheit der Diagonalen (Satz 5) nach sich zieht. Satz 1 über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck wäre wieder als Folge der Symmetrie am Rechteck ablesbar; Aussage 3 ebenso (zumindest für die beiden Spezialfälle des gleichschenkligen und des rechtwinkligen Dreiecks). Aussage 6 würde dadurch untermauert, daß in beiden durch eine Diagonale getrennten Halbkreisen die gleiche Figur liegt, nämlich je eine Hälfte des Rechtecks, wobei ja die Konstruktion mit einem beliebigen Rechteck begonnen wurde und die Sachlage für alle Rechtecke die gleiche ist.

Wir lesen dann auch unmittelbar an der Figur den Satz ab: „Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei Rechte“ (zunächst für das rechtwinklige Dreieck, dann aber auch für beliebige Dreiecke, indem wir noch eine Höhe einzeichnen). In der antiken Tradition wird diese Konsequenz jedoch nicht THALES zugesprochen, sondern „den Alten“, d.h. vermutlich erst der auf ihn folgenden Generation. Auch sei der Satz getrennt für das gleichseitige und das gleichschenklige Dreieck bewiesen worden. Für das letztere könnte wieder die Rechteckfigur im Kreis als Beweisgrundlage gedient haben. Für das gleichseitige Dreieck läge es nahe, an das dem Kreis einbeschriebene Sechseck zu denken, das man als eine der geometrischen Urfiguren anzusehen hat:

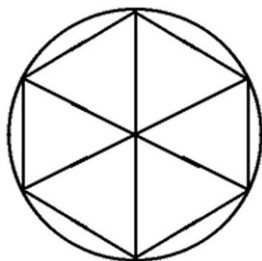


Abb. 2.1.4 Das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Sechseck

Hier ist jeder Zentriwinkel gleich 60° oder gleich einem Sechstel von vier Rechten, und da er jeweils einer Dreiecksseite der Länge r (r = Radius) gegenüberliegt, betragen auch die beiden anderen Winkel je 60° , also $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ = 2R$. Auch in diesem Fall bildet also die Basis des logischen Schlusses wieder eine Symmetriebeziehung: da die drei Seiten gleich lang sind, gibt es keinen Grund für die drei Winkel, nicht ebenfalls gleich groß zu sein. — Solche einfachen Symmetriebeziehungen stehen zweifellos am Anfang jeder geometrischen Theorie.

Schließlich wird in antiken Quellen von Thales noch berichtet, er habe die Höhe großer Gebäude mit Hilfe ihres Schattens bestimmt. Dazu habe er die Tageszeit abgewartet, in der sein eigener Schatten ebenso lang wie er selbst gewesen sei. Das impliziert, daß er mit Ähnlichkeitsbetrachtungen umzugehen wußte (s. Aufgabe 2.1.2).

2.1.3 Pythagoras und die Pythagoreer

Leider gibt es über die frühe Entwicklung der Mathematik bei den Griechen auch für die Folgezeit keine sicheren Mitteilungen, sieht man davon ab, daß in der Chronologie auf Thales Pythagoras von Samos folgt (vgl. Bd. 1, Abschnitt 4.3). Sein großes Wissen soll sich Pythagoras auf weiten Reisen erworben haben, wobei vermutet wird, seine mathematischen Kenntnisse würden vorwiegend aus babylonischen Quellen stammen. Er wanderte bald nach der Mitte des 6. Jhs. nach Kroton in Unteritalien aus, wo er eine religiös-philosophische Lebensgemeinschaft gründete und schon früh zu einer mythischen Figur wurde. Was in der Geometrie von Pythagoras selbst (er starb um 500 v. Chr.), was von seinen Anhängern stammt, läßt sich heute nicht mehr mit Gewißheit entscheiden. Schon Aristoteles nannte sie „die Pythagoreer“; diese Schule erlosch im Laufe des 4. Jhs. (Sie darf nicht verwechselt werden mit den sog. Neupythagoreern, die ab 100 n. Chr. an die alten Lehren anknüpften — zu ihnen zählen u. a. die Mathematiker Porphyrios und Iamblichos.) In dem schon erwähnten, leider nur indirekt überlieferten historischen Bericht des Eudemos steht, Pythagoras habe das Wissen um die Geometrie zu einer „Freien Lehre“ umgebildet. Das soll wohl heißen, zu einer um ihrer selbst willen betriebenen Wissenschaft — im Gegensatz zum Handeln nach vorgegebenen Regeln aus praktischen Lebenserfordernissen oder sakralen Zwecken heraus. Somit stehen wir hier am Beginn der Entwicklung der reinen Mathematik.

Im Kern der religiös-philosophischen Lehre des Pythagoras stand die Zahl. Ausgehend von der Einheit (monas) und den natürlichen Zahlen 2, 3, 4, ..., entwickelten die Pythagoreer die ersten Grundlagen der Zahlentheorie ebenso wie eine auf einfachen Zahlverhältnissen basierende Musiktheorie.

Bei der Beschäftigung mit mathematischen Fragen kam es zu der umstürzenden Erkenntnis der Existenz irrationaler Verhältnisse. Das verursachte nach Ansicht vieler Forscher die erste Grundlagenkrise der Mathematik. Die tragische Entdeckung soll um 450 v. Chr. Hippasos von Metapont gemacht haben; der Legende zufolge wurde er für den Verrat dieses Geheimnisses aus dem pythagoreischen Bund ausgestoßen und kam im Meer um.

Ein möglicher Auslöser könnte das Studium des Verhältnisses von Seite s und Diagonale d eines Quadrates gewesen sein: der pythagoreische Lehrsatz ergibt ja sofort $d^2 = 2 \cdot s^2$, woraus sich unter Verwendung der Eigenschaften „gerade“ und „ungerade“ der natürlichen Zahlen rasch ein Widerspruch zur Annahme, dieses Verhältnis lasse sich in ganzen Zahlen ausdrücken, herleiten läßt. (In den Handschriften der „Elemente“ Euklids findet sich dieser Beweis am Ende des X. Buches; Aristoteles bezog sich in seinen Schriften wiederholt auf diesen Widerspruchsbeweis.)

Auch rein geometrisch kann dieser Widerspruch aufgewiesen werden. Das ist nicht nur beim Quadrat als der einfachsten Figur möglich; es kommt für den ersten Nachweis der Existenz nichtrationaler Verhältnisse vor allem auch das reguläre Fünfeck in Frage. Denn das regelmäßige Pentagramm (der fünfzackige Stern) war das Ordenszeichen der Pythagoreer. Man erhält es, indem man im Fünfeck die fünf Diagonalen einzeichnet (Abb. 2.1.5). Wie beim Quadrat läßt sich die Länge einer Diagonalen nicht rational zur Länge der Seite des Fünfecks in Beziehung setzen. Denn in beiden Fällen führt das aus dem Meßvorgang abgeleitete Verfahren der Wechselwegnahme (s. u.) zu einem nicht-endenden Prozeß, also zu der aufregenden Entdeckung der Existenz irrationaler Verhältnisse. Da man annehmen darf, daß die Pythagoreer die Eigenschaften ihres Bundessymbols intensiv untersuchten, ist die Vermutung nicht ganz abwegig, ihr Glaube, alles lasse sich in ganzen Zahlen ausdrücken, sei zuerst beim Studium des Pentagramms bzw. des Pentagons (Fünfecks) erschüttert worden.

Das Verfahren der Wechselwegnahme (das arithmetisch dem euklidischen Algorithmus entspricht) ist eine Weiterentwicklung des normalen Meßvorganges: man nimmt die kürzere der beiden Strecken so oft wie möglich von der längeren weg. Geht das ohne Rest auf, hat man ein ganzzahliges Verhältnis (ein Vielfaches). Bleibt ein Rest (der dann kleiner als die kürzere Strecke sein muß), nimmt man diesen Rest so oft wie möglich von der kürzeren weg. Geht das, ohne daß ein weiterer Rest übrigbleibt, dann ist dieser Rest ein gemeinsames Maß für beide Strecken, so daß sie in rationalem Verhältnis zueinander stehen. Andernfalls wird das Verfahren (falls notwendig, mehrfach) mit dem neu entstandenen (kleineren) Rest wiederholt. Bleibt irgendwann kein Rest zurück, ist der vorhergehende ein gemeinsames Maß für alle in dieser Prozedur erzeugten Strecken, also auch für die beiden Ausgangsstrecken. Diese heißen daher *kommensurabel*: sie sind mit einem gemeinsamen Maß exakt meßbar, d.h., sie stehen in rationalem Verhältnis zueinander. Bricht die Wechselwegnahme aber nicht ab, sind die Ausgangsstrecken *inkommensurabel* zueinander; sie besitzen kein rationales Verhältnis.

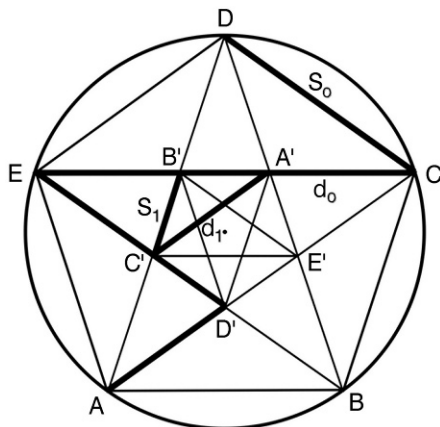


Abb. 2.1.5 Das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Fünfeck

Am regelmäßigen Fünfeck könnte Hippasos die Irrationalität von Diagonale und Seite wie folgt nachgewiesen haben (die Bezeichnungen beziehen sich auf Abb. 2.1.5). Die fünf Diagonalen (der Länge d_0) des Ausgangsfünfecks sind jeweils parallel zu einer Seite (s_0) und bilden im Inneren ein neues regelmäßiges Fünfeck, dessen Diagonalen (der Länge d_1) ebenfalls die gleichen fünf Richtungen einnehmen. Folglich sind $CDED'$ und $AC'A'D'$ zwei (verschieden große) Rauten mit je vier gleichen Seiten. Daher hat der größere Abschnitt einer Diagonalen, z.B. ED' , die Länge einer Seite s_0 des Ausgangsfünfecks, während der kleinere Abschnitt längengleich mit einer Diagonalen d_1 des inneren Fünfecks ist. Da außerdem das Mittelstück von d_0 identisch ist mit der Seite s_1 des inneren Fünfecks, verläuft die Wechselwegnahme wie folgt:

$$d_0 - s_0 = d_1 < s_0, \quad s_0 - d_1 = s_1 < d_1,$$

$$d_1 - s_1 = d_2 < s_1, \quad s_1 - d_2 = s_2 < d_2,$$

$$d_2 - s_2 = d_3 < s_2, \quad \dots$$

Sie bricht also nicht ab und liefert demzufolge kein gemeinsames Maß für Seite und Diagonale (s. Aufgabe 2.1.3).

Da alle wesentlichen Entdeckungen und Theorien der Pythagoreer auf dem Gebiet der Geometrie in die Elemente Euklids eingegangen sind, worüber in Abschnitt 2.3 ausführlich berichtet wird, wenden wir uns jetzt dem sog. „Goldenen Zeitalter“ der griechischen Naturwissenschaft und Mathematik zu.

2.2 Athenische Periode

Wie der Name sagt, lag das Zentrum der mathematischen Forschung in dieser rund 150 Jahre andauernden Periode (ca. 450 bis ca. 300) in Athen. In der Philosophenschule Platons (429–348), der Akademie, wurde das Idealbild der Mathematik als einer rein deduktiv herleitbaren Wissenschaft ausgebildet, das die Entwicklung dieser Wissenschaft bis heute so außerordentlich stark prägte. Für Platon nahm die Mathematik eine Zwischenstellung zwischen dem Reich der reinen Ideen und der Welt der sinnlich erfahrbaren Dinge ein. Im Umkreis der Akademie entstanden viele der Theorien, die uns durch die Elemente des Euklid in systematisierter Form überliefert wurden — frei von jedem Anwendungsbezug.

2.2.1 Eudoxos

Genialster Mathematiker unter Platons Zeitgenossen ist Eudoxos von Knidos (408? – 355?). Er entwickelte seine Theorie des Irrationalen aus dem Bestreben heraus, den Verhältnissbegriff auch auf irrationale Verhältnisse auszudehnen. Seine zweite großartige Leistung war die Entwicklung der Exhaustionsmethode (Euklid, Elemente XII), der Basis für die Inhaltsbestimmung gekrümmter Flächen und Volumina, die ein Jh. später von Archimedes so meisterhaft angewandt wurde.

Die Grundannahme der Pythagoreer, alle Zahlen seien aus einer Einheit zusammengesetzt, die Einheit selbst aber sei unteilbar, hatte ihnen den Aufbau einer elementaren Proportionenlehre ermöglicht. Das Verhältnis von zwei gegebenen Zahlen a, b war demnach ein rationales, wenn ein gemeinsames Maß k existiert, von dem beide ein ganzzahliges Vielfaches sind: $a = n \cdot k$, $b = m \cdot k$; $n, m \in \mathbb{N}$. Ergibt sich, daß in entsprechender Weise für ein Zahlenpaar c, d gilt: $c = n \cdot k'$, $d = m \cdot k'$, so ist $a : b = c : d$. In diesem Fall ist $ma = nb$ und $mc = nd$. Ist aber für irgend zwei ganze Zahlen m', n' $m'a < n'b$, dann ist auch $m'c < n'd$, und entsprechend für die Relation $>$. Dies wird in den „Elementen“ Euklids in Definition 20 des 7. Buches folgendermaßen formuliert:

Zahlen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.

Im Gegensatz zu den aus Einheiten gebildeten (natürlichen) Zahlen sind Strecken unendlich oft teilbar; daher kann nicht unbedingt ein gemeinsames Maß vorausgesetzt werden, so daß diese elementare Proportionenlehre versagt. Eudoxos löste dieses Dilemma durch die Konstruktion einer sowohl auf rationale

wie irrationale Größen anwendbaren Proportionenlehre. Die eben skizzierten Überlegungen mögen ihm dabei den Weg gewiesen haben. Denn er machte diese Relationen zur Grundlage der Definition von Verhältnisgleichheit von zwei Paaren von Größen auch in jenen Fällen, in denen nicht gesichert ist, ob ein rationales Verhältnis vorliegt. Das ist am Beginn des 5. Buches der „Elemente“ Euklids als Definition 5 und 6 in folgenden Worten zum Ausdruck gebracht:

Man sagt, daß Größen **in demselben Verhältnis stehen**, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind;
Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen **in Proportion stehend** heißen.

Auf diese Weise befreite Eudoxos die Geometrie von den pythagoreischen Fesseln, der Beschränkung auf rationale Größen. Im 5. Buch der „Elemente“ wird dann die so begründete Verhältnislehre systematisch aufgebaut.

Vielleicht ist dem Leser aufgefallen, daß die simple Definition (für Proportionen, die aus natürlichen Zahlen gebildet sind) im 7. Buch, die wesentlich raffiniertere Definition aber schon im 5. Buch der „Elemente“ gebracht wird. Dies ist eines der Beispiele, das dem Historiker die Vorgehensweise Euklids offenbart: er vereinigte Vorlagen unterschiedlicher Art in seinem Werk und benutzte offenbar im 7. Buch eine ältere Definition, die durch die im 5. Buch vorgestellte, auf Eudoxos zurückgehende Definition eigentlich schon überholt war. Eine andere, sich in solchen Fällen anbietende Erklärung liegt in der Annahme, im langen Prozeß der Überlieferung seien Teile durcheinander geraten. Solche Fragen stellen sich nicht nur bei Euklid: die überlieferten Texte sind Abschriften von Abschriften oder von Bearbeitungen oder von Übersetzungen bzw. von allem zusammen, nie die eigenhändigen Niederschriften der Verfasser selbst. Nur durch sorgfältiges Vergleichen und kritisches Abwägen der Herausgeber, die die jeweils aktuellen Forschungsergebnisse berücksichtigen müssen, entstehen jene Textausgaben, die dann allzu leicht als ‘definitive Ausgaben’ angesehen werden.

Neben Eudoxos ist vor allem der ebenfalls hoch begabte Theaitetos (415? – 369?) zu erwähnen, dem Platon einen eigenen Dialog widmete. Zu seinen Schöpfungen gehört eine systematische Konstruktion der quadratischen Irrationalitäten (Elemente X) und, darauf gestützt, der Existenzbeweis der fünf regelmäßigen (oder platonischen) Körper (Elemente XIII, wo auch nachgewiesen wird, daß es nicht mehr als fünf dieser Körper geben kann).

Auch Aristoteles (384-322) wies der Mathematik eine zentrale Rolle unter den Wissenschaften zu, wenngleich sich seine Auffassung vom Wesen der Mathematik sehr von der platonischen unterschied. Denn er vertrat die Ansicht, die mathematischen Objekte seien durch Abstraktion aus der Anschauung gewonnen. Vor allem interessierte ihn das Mathematische in Verbindung mit der Ausarbeitung seiner Syllogistik. In seine „Physik“ nahm er Untersuchungen auf über das Unendliche (das nach ihm nur potentiell, aber nicht aktuell existieren kann) und das Kontinuum (wie Raum und Zeit), das seiner Ansicht nach nicht aus Punkten zusammengesetzt sein kann.

Zeitlich endet die Athenische Periode etwa mit dem großen mathematischen Systematiker Euklid, wenngleich dessen Wirkstätte das Museion in Alexandria war. Seine Bedeutung für die Geometrie rechtfertigt, ihm einen eigenen Abschnitt (2.3) zuzuweisen.

Da Euklid in seinen Elementen jedoch nur mit Zirkel und Lineal ausführbare Konstruktionen behandelt, muß hier noch auf die Entdeckung der Kegelschnitte und die Entwicklung ihrer Theorie eingegangen werden. Heute, wo man Kurven in der Regel durch ihre (algebraischen oder transzendenten) Gleichungen beschreibt (wie es Descartes im 17. Jh. lehrte; vgl. Kap. 6), würde man den Kreis unter die Kegelschnitte einordnen. Für die Griechen waren dagegen bei der ersten Systematisierung der Geometrie die Konstruktionsmittel ausschlaggebend — daher bestimmen die mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Figuren den Bereich der (Elementar-)geometrie bis auf den heutigen Tag.

2.2.2 Die sogenannten Klassischen Probleme der Mathematik

Naturgemäß mußten die griechischen Mathematiker gelegentlich auf Probleme stoßen, die sich einer exakten Lösung mittels dieser beiden (theoretisch gedachten) Instrumente trotz allen Bemühens entzogen. Drei davon haben in der Geschichte der Geometrie eine besondere Bedeutung erlangt; sie werden oft unter dem Namen der „drei klassischen Probleme der Geometrie“ zusammengefaßt. Es sind das delische Problem oder die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung und die Kreisquadratur. Da jedoch die Entscheidung über die wahre „Natur“ dieser Probleme (sie konnte erst im 19. Jh. gefällt werden) mit algebraischen Hilfsmitteln erzielt wurde, ist es heute üblich, alle drei in der Algebra zu behandeln. Das Resultat der Untersuchung wird den Lesern bekannt sein: Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung führen auf kubische Gleichungen, das Problem der Kreisquadratur dagegen ist transzendent, kann also durch keine algebraische Gleichung (noch so hohen Grades) erfaßt werden.

Aus heutiger Sicht betrachtet, bedeutet das, daß die Griechen zur Lösung dieser Aufgaben entweder weitere Kurven (über Gerade und Kreis hinaus) einführen mußten (teilweise durch den Entwurf komplizierterer Zeicheninstrumente bestimmt), oder das Lineal in einer in der Geometrie sonst nicht erlaubten Weise einzusetzen sich genötigt sahen. Einen Überblick über ihre vielfältigen Anstrengungen bietet die folgende Tabelle. Einige Beispiele für die verschiedenen Möglichkeiten seien hier vorgestellt — teilweise im Vorgriff auf die zeitlich späteren Abschnitte, um den Zusammenhang zu wahren. Eine eingehende Darstellung findet man z.B. in [Heath 1921, Bd. 1, Kap. VII].

Die Würfelverdoppelung

Das Problem der Würfelverdoppelung hat einen legendären, in voneinander abweichenden Versionen überlieferten Ursprung. Laut Theon von Smyrna forderte der Gott durch einen Orakelspruch von den von der Pest geplagten Deliern, sie sollten einen Altar von der doppelten Größe des bestehenden errichten (vgl. hierzu auch Abschnitt 3.3.1). Das habe die Architekten in große Verlegenheit versetzt, da sie nicht wußten, wie man einen Körper verdoppele. Nach anderer Überlieferung versuchte man der Aufforderung, das würfelförmige Grabmal des Glaukos zu verdoppeln, dadurch zu folgen, daß man die Länge der Seiten verdoppelte, dabei den Irrtum bemerkte und nach der richtigen Lösung zu forschen begann (vgl. die Wiedergabe der Texte in [Waerden 1956, 262–266]). Rein geometrisch betrachtet, ergibt sich die Fragestellung leicht als Verallgemeinerung des Problems der Quadratverdoppelung (vgl. hierzu auch Abschnitt 3.3.1); algebraisch betrachtet, ist es die Ausdehnung des Quadratwurzelnziehens auf das Kubikwurzelnziehen, womit sich schon die Babylonier beschäftigt hatten.

In Griechenland führte um die Mitte des 5. Jhs. vor Chr. Hippokrates von Chios das Problem auf die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen x, y zwischen der Würfelseite a und ihrem Doppelten zurück:

$$a : x = x : y = y : 2a. \quad (2.2.1)$$

Diese Bildung zweier geometrischer Mittel x, y zwischen zwei gegebenen Größen (hier: $a, 2a$) entspricht einer reinen kubischen Gleichung, wie man sich leicht überlegt. Es war diese Fassung der Problemstellung, von der praktisch alle späteren Versuche einer Lösung ihren Ausgang nahmen.

Die für die Würfelverdoppelung von Hippokrates gefundene Beziehung (2.2.1) inspirierte um 350 v. Chr. den Eudoxos-Schüler Menaichmos dazu, diese beiden Proportionalen mit Hilfe einer Parabel und einer gleichseitigen Hyperbel zu bestimmen und auf diese Weise das delische Problem konstruktiv zu lösen (s. Aufgabe 2.2.1).

Nicht gesichert ist, ob Menaichmos Parabel und Hyperbel bereits als Schnitte eines senkrechten Kreiskegels erkannt hat oder ob er lediglich (modern formuliert) untersuchte, wie aus der Funktionsbeziehung $y^2 = 2ax$ die Verwandlung aller Rechtecke, deren eine Seite die Länge $2a$ hat, in flächengleiche Quadrate der Seitenlänge y folgt, bzw. aus $xy = 2a^2$ die Umwandlung eines Rechtecks $2a \cdot a$ in alle möglichen anderen, die flächengleich dazu sind. Dazu konnte er sich des von Euklid im 2. Buch der Elemente beschriebenen Verfahrens der Flächenanlegung bedienen.

Der Zusammenhang dieser Kurven mit dem Kreiskegel war jedenfalls (um 330) Aristaios bekannt. Er erzeugte die Hyperbel (genau gesagt: einen Ast derselben), die Parabel und auch die Ellipse als Schnitte senkrecht zu einer Erzeugenden des stumpfen, des rechten bzw. des spitzen (senkrechten) Kreiskegels. Er behandelte diese Kurven in einer (verlorenen) Abhandlung über solche „körperliche“ Örter — so genannt, weil sie vom Körper des Kegels abgeleitet wurden. Alle übrigen Kurven höherer Ordnung (einschließlich der transzendenten) wurden als „lineare Örter“ bezeichnet (nicht zu verwechseln mit dem heute üblichen Begriff „linear“).

Auch eine von Euklid verfaßte Abhandlung über Kegelschnitte ist nicht überliefert. Der Grund für den Verlust dürfte bei beiden Werken der gleiche sein: sie wurden übertroffen durch die in acht Bücher gegliederte Kegelschnittlehre des Apollonios von Perga. Dieser gehört allerdings, ebenso wie der ihn an Bedeutung noch überragende Archimedes, schon der alexandrinischen Epoche an.

Ein anderes, auf der Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen aufbauendes Lösungsverfahren ist die Kissoïde des Diokles, etwa um 180 v. Chr. gefunden, wovon Proklos in seinem mehr als 500 Jahre später verfaßten Euklid-Kommentar berichtet. In einen Kreis seien der senkrechte Durchmesser AB und der waagrechte Durchmesser CD eingezeichnet. Auf den Bögen $\widehat{BD}$ bzw. $\widehat{BC}$ seien die Punkte E bzw. F markiert, wobei die Bögen $\widehat{BE}$ und $\widehat{BF}$ gleich lang seien. Es seien EG und FH senkrecht auf DC gezeichnet. Die Verbindungsgerade EC schneide FH in P , einem Punkt der Kissoïde. Die weiteren Punkte erhält man, indem man die Lage von E und F variiert (Abb. 2.2.1).

Es gilt nun nachzuweisen, daß der Punkt P auf der so konstruierten Kissoïde mit den Strecken FH und HC zwei mittlere Proportionalen zwischen DH und HP liefert, daß also gilt:

$$DH : HF = HF : HC = HC : HP. \quad (2.2.2)$$

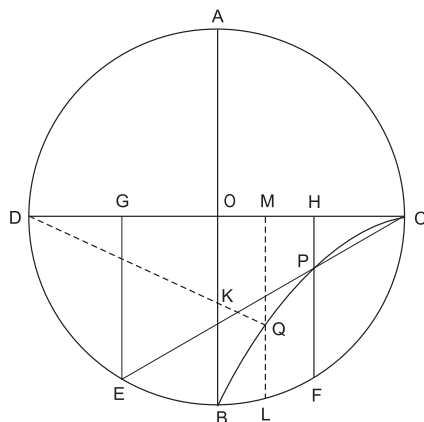


Abb. 2.2.1 Die Kissoïde des Diokles

Das läßt sich leicht zeigen, wenn man die Gleichheit der beiden Dreiecke $\triangle DHF$ und $\triangle CGE$ berücksichtigt sowie die Tatsache, daß HF das geometrische Mittel aus DH und HC ist (Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle DCF$). Führt man mit den Achsen OC, OB und dem Ursprung O ein Koordinatensystem ein und setzt $OH = x$, $HP = y$ und den Kreisradius $OB = OC = OD = r$, so erhält man die cartesische Gleichung der Kissoïde als

$$y^2 = \frac{(r-x)^3}{r+x}. \quad (2.2.3)$$

Sie hat eine Spitze bei C und die Kreistangente in D ist zugleich Asymptote. Setzt man die Kissoïde als gegeben voraus und will die beiden mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken a, b finden, dann wähle man den Punkt K auf OB so, daß $DO : OK = a : b$. (Beachte, daß an dieser Stelle nur das Verhältnis der beiden gegebenen Strecken eingeht, da der Radius r des der Kissoïde zugrundeliegenden Kreises vorgegeben war!) Dann verbinde man DK und verlängere bis zum Schnittpunkt Q mit der Kissoïde. Durch Q zeichne man die Ordinate LM senkrecht zu DC . Dann sind LM und MC die beiden mittleren Proportionalen zu DO und OK :

$$DM : LM = LM : MC = MC : MQ.$$

Ferner gilt

$$DM : MQ = DO : OK = a : b.$$

Will man die zu den beiden gegebenen Strecken a, b gehörenden mittleren Proportionalen bekommen, hat man demnach noch eine ähnliche Vergrößerung (bzw. Verkleinerung) der Strecken DM, LM, MC und MQ im Maßstab $DM : a$ vorzunehmen.

Die Winkeldreiteilung

Das klassische Problem der Teilung eines **beliebigen** Winkels in drei gleiche Teile hat viele griechische Mathematiker beschäftigt. Da sie das Problem mit Zirkel und Lineal allein nicht zu lösen vermochten, ersannen sie raffinierte Methoden mit anderen Hilfsmitteln.

Daß die Drittelung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal allein nicht zu lösen ist, wurde erst mit den Methoden der modernen Algebra bewiesen. Das Problem führt auf die gemischte kubische Gleichung:

$$x^3 - 3r^2x - r^2a = 0 \quad (2.2.4)$$

(oder eine dazu äquivalente Form). Trigonometrisch gedeutet lautet sie

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha - \cos(3\alpha) = 0. \quad (2.2.5)$$

Das ist die aus der Trigonometrie bekannte Formel zur Berechnung des $\cos \alpha$, wenn $\cos(3\alpha)$ bekannt ist (vgl. dazu Aufgabe 2.2.5).

Vermutlich trat dieses Problem in den Gesichtskreis der Mathematiker, als sie versuchten, für astronomische Zwecke eine Sehnentafel aufzustellen. Wie unten im Abschnitt 2.5.5 über die Sehnentafel des Ptolemaios genauer erläutert wird, stößt man dabei auf die elementargeometrisch nicht mehr zu bewältigende Aufgabe, aus der Sehne für 3° die Sehne für 1° zu gewinnen. Auch die systematische Konstruktion regelmäßiger Vielecke über das Fünfeck und Sechseck hinaus verlangt die Vornahme von nichttrivialen Winkelteilungen: $360^\circ : 7$ beim Siebeneck, $120^\circ : 3$ bzw. $60^\circ : 3$ beim Neuneck.

Für die Teilung eines Winkels in n gleiche Teile erdachte sich Hippias von Elis eine Kurve, die später den Namen ‘Quadratrix’ erhielt, weil sie auch das Problem der Kreisquadratur beantwortet. Damit ist schon angedeutet, daß es sich um eine transzendente Kurve handeln muß! Dennoch ist sie leicht beschreibbar, da sie durch zwei einfache Bewegungen erzeugt wird. Man denke sich ein Quadrat, dessen obere Seite sich parallel zur Ausgangslage mit konstanter Geschwindigkeit zur unteren hinbewegt. In der gleichen Zeit drehe sich die linke Quadratseite um den unteren linken Eckpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn derart, daß die beiden Bewegungen

zugleich beginnen und zugleich enden. Das obere Ende der sich drehenden Strecke beschreibt dann einen Viertelkreis innerhalb des Quadrates. In der Endlage fallen demnach die beiden sich bewegenden Seiten mit der unteren Quadratseite zusammen.

Es empfiehlt sich für uns, ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzuführen, dessen x -Achse die untere Seite, dessen y -Achse die linke Seite des Quadrates ist (die Seitenlänge sei a). Der Schnittpunkt $P(x, y) = P(\rho, \phi)$ der beiden bewegten Strecken beschreibt die Quadratrix (ρ = Abstand vom Ursprung, ϕ = Winkel zwischen x -Achse und rotierender Seite, abnehmend von $\pi/2$ bis 0°). P wandert also von der oberen linken Ecke nach rechts und unten. Die Bewegungsvorschrift hat zur Folge, daß z.B. nach einem Drittel der Zeit die von oben herabkommende Seite ein Drittel ihres Weges (parallel zu sich selbst) zurückgelegt hat, gleichzeitig auch die linke Seite eine Drehung um ein Drittel von 90° , also um 30° vollzogen hat. Denkt man sich jetzt die Quadratrix gegeben, teilt die linke Quadratseite in n gleiche Teile und zieht durch den obersten Teilpunkt eine Parallele zur oberen Seite, so erhält man auf der Kurve einen Schnittpunkt. Dessen Verbindung mit dem Ursprung liefert also einen Strahl der Länge ρ , der vom Winkel $\pi/2$ den Bruchteil $\frac{1}{n}$ abgeschnitten hat.

Aus der Proportionalität der Bewegungen folgt die Gleichung

$$y : a = \phi : \frac{\pi}{2} = \rho \cdot \sin \phi : a. \quad (2.2.6)$$

Die daraus unmittelbar abzuleitende Polargleichung ist transzendent — soweit die Quellen verraten, ist diese älteste transzendente Kurve früher entdeckt worden als die Kegelschnitte! Etwa zwei Generationen nach ihrem Erfinder Hippias erkannte Deinostratos die Möglichkeit, die Quadratrix auch als Hilfsmittel bei der Kreisquadratur einzusetzen (vgl. Aufgabe 2.2.2).

Ein von den Griechen häufiger verwendetes Verfahren sind sogenannte Einschiebungskonstruktionen (griechisch ‘Neusis’-Konstruktionen). Das Grundprinzip dabei ist es, eine gegebene Strecke in bestimmter Weise zwischen gegebene Kurven einzupassen. Dazu kann man die Endpunkte dieser Strecke auf einem Lineal markieren und letzteres solange verschieben, bis die beiden Punkte die gewünschte Lage einnehmen. Da in der Elementargeometrie dieses Markieren auf einem Lineal nicht erlaubt ist, spricht man auch oft von einer ‘Papierstreifenkonstruktion’.

Pappos beschrieb eine derartige Konstruktion aus klassischer Zeit für die Winkelteilung. Man bette den zu drittelnden Winkel $\alpha = \angle AOB < \pi/2$ so in ein Rechteck ein, daß der Scheitel O in der linken unteren Ecke zu liegen kommt, der eine Schenkel mit der unteren Seite zusammenfällt und der andere die Diagonale OB des Rechtecks bildet (solche Rechtecke lassen sich immer

finden). Die Eckpunkte des gewählten seien, im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet, O, A, B, C .) Auf einem Papierstreifen markiere man die beiden Strecken $DF = FE = OB$, plaziere E so auf der über B hinaus verlängerten Geraden CB , daß D auf der Seite AB zu liegen kommt und zugleich der Papierstreifen durch O geht. Wenn diese Position experimentell gefunden ist, teilt die neue Hilfslinie $ODFE$ den gegebenen Winkel im Verhältnis $2 : 1$, d.h. er wird durch sie gedrittelt (vgl. Aufgabe 2.2.3).

Archimedes gab eine ähnliche ‘Neusis’ (Papierstreifenkonstruktion) zur Winkeldreiteilung an — durch einen Vergleich der beiden tritt das Prinzip klar hervor, das sich auf die Fünftelung, Siebtelung, ... eines gegebenen Winkels ausdehnen läßt. In einen Kreis mit Zentrum O und Radius r sei der zu dritteln- de Winkel α mit Scheitel in O eingebettet — sagen wir so, daß der zugehörige Bogen AE in die linke Hälfte zu liegen kommt und E sein unterer, A sein oberer Endpunkt sei. Dann werde der Kreisdurchmesser EOD eingezeichnet und nach rechts über D hinaus verlängert. Auf dem Papierstreifen wird die Strecke $BC = r$ markiert und dann der Streifen so an die beschriebene Figur angelegt, daß C auf dem verlängerten Durchmesser liegt, B auf dem Kreisumfang und die Verlängerung (nach links) durch A geht. Nachdem diese Position des Streifens gefunden ist (was wiederum nur experimentell zu machen ist), werden noch die beiden Radien OB und OA eingetragen. Ähnlich wie in der von Pappos beschriebenen Konstruktion entsteht dadurch ein Streckenzug aus drei gleichlangen Strecken (hier: $CB = BO = OA = r$; im vorhergehenden Fall $EF = FB = BO$), der zwischen zwei Schenkeln eines Winkels hin- und herpendelt. Er bildet mit diesen zwei gleichschenklige Dreiecke, wobei nach dem Satz vom Außenwinkel eine Winkelverdoppelung auftritt (s. Aufgabe 2.2.4).

Der eben erwähnte Streckenzug bietet eine einfache (und verallgemeinerungsfähige) Möglichkeit, die Dreiteilungsgleichung (2.2.5) (bzw. die n -Teilungsgleichung) für einen gegebenen Winkel abzuleiten. Hinweise dazu werden in Aufgabe 2.2.5 gegeben.

In der Neusis-Konstruktion, die durch Pappos überliefert ist, ging es darum, eine gegebene Strecke (oben als DE bezeichnet) an die Strecke AC seitlich so anzusetzen, daß ihre Verlängerung durch B ging (wodurch dann die Lage von C bestimmt ist). Im 2. Jh. v. Chr. ersann Nikomedes ein Instrument, das diese Forderung mechanisch zu erfüllen gestattet (vgl. [Scriba 1992]). Die damit konstruierbaren Kurven erhielten wegen ihrer Gestalt den Namen Konchoïde oder Kochloïde, auf deutsch ‘Muschelkurven’. Das Instrument besteht aus zwei T -förmig fest miteinander verbundenen Linealen, auf denen sich ein drittes in bestimmter Weise bewegen kann (Abb. 2.2.2).

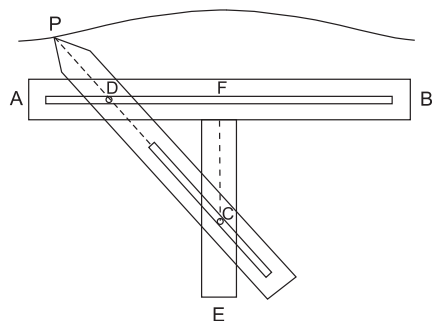


Abb. 2.2.2 Die Konchoïde des Nikomedes
und das zu ihrer mechanischen Konstruktion dienende Instrument

Das erste Lineal AFB sei in Längsrichtung mit einem Schlitz versehen. An seiner Mitte F sei senkrecht dazu das zweite Lineal FE angebracht, in das in der Entfernung b von F ein fester Stift C eingesetzt sei. Das dritte Lineal ende in einer Spitze P und trage im festen Abstand a von P einen Stift D (also $PD = a$), der sich im Schlitz des ersten Lineals bewegen kann. Jenseits von D beginnt auch auf diesem Lineal ein Schlitz in Längsrichtung, in den der Stift C eingreift. Beim Verschieben dieses dritten Lineals beschreibt der Endpunkt P die Muschellinie. Offensichtlich ist für sie der Querbalken des T-förmigen Gerätes (genauer: die durch A, F und B laufende Gerade) eine Asymptote (Abb. 2.2.2).

Zum Vergleich dieses Instruments des Nikomedes mit der von Pappos beschriebenen Einschiebung muß man den Stift C identifizieren mit der Ecke O und den Schlitz AFB des ersten Lineals mit der Rechteckseite BA , auf der die feste Strecke $a = DE$ beginnen soll. Zeichnet man jetzt mit diesem Gerät die Konchoïde, so wird sie die verlängerte obere Rechteckseite CB in dem gesuchten Punkt schneiden und damit die Lösung liefern (vgl. Aufgabe 2.2.6).

Die Kreisquadratur

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis ein exakt flächengleiches Quadrat zu konstruieren, ist nach heutigem Verständnis ein Integrationsproblem, sie wird daher in der mathematischen Analysis behandelt. Die Griechen sahen es in erster Linie als ein geometrisches Konstruktionsproblem. Dafür seien einige Beispiele angeführt.

Schon die noch ins 5. vorchr. Jh. fallenden Versuche des Hippokrates, Kreismonde zu quadrieren, sind vielleicht von der Aufgabe angeregt worden, die Fläche eines Kreises in ein Quadrat zu verwandeln. Das gelang ihm in drei Fällen, wovon der einfachste derjenige ist, bei der der Mond von einem Halbkreis und einem Viertelkreis begrenzt wird (siehe Abb. 2.2.3).

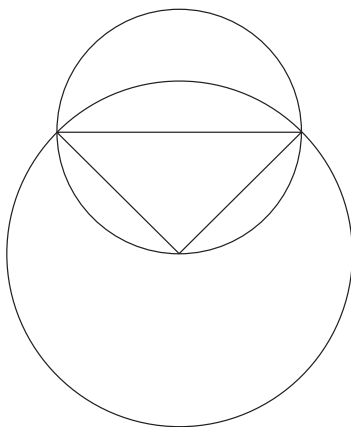


Abb. 2.2.3 Mönchchenquadratur des Hippokrates

Zur Quadratur des Vollkreises trug dieses Ergebnis allerdings nichts bei. Die dadurch indirekt aufgeworfene Frage, ob es über die von Hippokrates quadrierten Kreismonde hinaus weitere gibt, die sich elementargeometrisch quadrieren lassen, konnte erst 1947 (mit Methoden der Algebra) endgültig beantwortet werden: es existieren genau fünf solcher Kreismonde [Scriba 1988].

Um 430 v. Chr. versuchte Antiphon, die Kreisfläche durch einbeschriebene regelmäßige $3 \cdot 2^n$ -Ecke oder $4 \cdot 2^n$ -Ecke auszuschöpfen. Wenig später zog Bryson gleichzeitig ein- und umbeschriebene regelmäßige Polygone heran, scheint aber einen einfachen Zwischenwertsatz (Mittelbildung) verwendet zu haben, um dessentwillen sein Verfahren kritisiert wurde. Um die Mitte des 4. Jhs. erkannten die Brüder Deinostratos und Menaichmos, wie sich die Kurve des Hippias zur Kreisquadratur heranziehen läßt (vgl. Aufgabe 2.2.2). Den entscheidenden Nachweis, daß die Kreiszahl π sowohl für das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser wie für das Verhältnis von Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers bestimmend ist, lieferte Archimedes, dem wir auch die beiden oft als Näherungswerte verwendeten Schranken

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

verdanken.

2.3 Euklid

2.3.1 Die Elemente

An der Grenze zwischen der athenischen und der hellenistischen Periode der griechischen Mathematik steht — zeitlich wie inhaltlich — Euklid. Über ihn selbst ist fast nichts bekannt, aber sein Werk war so folgenreich für die gesamte Mathematik und insbesondere für die Geometrie, daß der Name Euklid häufig als Synonym für Mathematik bzw. für Geometrie benutzt wurde, und er ist nach wie vor in solchen Zusammenhängen wie euklidischer Raum, euklidische Geometrie, euklidische Metrik, euklidischer Ring in ständigem Gebrauch.

Euklids Hauptwerk, die „Elemente“, ist der älteste größere mathematische Text, der aus der griechischen Antike überliefert wurde. Unser bescheidenes Wissen über die den „Elementen“ vorangegangene Entwicklung beruht zum Teil auf den fragmentarischen, unzuverlässigen und subjektiv gefärbten Berichten von Gelehrten der Spätantike und des islamischen Mittelalters, zum Teil auf dem, was man mittels inhaltlicher und sprachkritischer Analysen aus dem Text der „Elemente“ über seine Vorgeschichte erschließen kann bzw. zu können glaubt und nur zum geringsten Teil auf voreuklidischen Textfragmenten. Wo wie im Fall der Frühgeschichte der abendländischen Mathematik eine dürftige Quellenlage mit einer gewissen weltanschaulich-philosophischen Relevanz zusammentrifft, ist ein weites Feld von Spekulationen, Hypothesen und Streitfragen zu erwarten. So ist die Sekundärliteratur über Euklid und die „Elemente“ mittlerweile fast unübersehbar und wächst noch ständig. All dies auch nur in Kürze zu referieren, würde allein ein Buch füllen. ([Schreiber 1987], [Schönbeck 2003], siehe auch den Euklid-Artikel in [Wußing/Arnold 1989].) Wir müssen uns in diesem Kapitel auf einen summarischen Überblick über den Inhalt und einen — freilich subjektiv ausgewählten — Aspekt sowie einige Angaben zur Überlieferungsgeschichte beschränken. Weitere inhaltliche und tradierungsgeschichtliche Ausführungen werden in den folgenden Kapiteln zwangsläufig zur Sprache kommen (vgl. auch Bd.1, Abschnitt 4.5).

Die „Elemente“ sind in 13, üblicherweise mit römischen Zahlen numerierte „Bücher“ gegliedert, wobei ein „Buch“ einer Papyrusrolle, also einem Kapitel eines modernen Buches entspricht. Die folgende Liste gibt einen ersten Überblick über den Inhalt und seine vermutliche Herkunft:

- I Anfang eines axiomatischen Aufbaus der ebenen Geometrie bis zur Satzgruppe des Pythagoras, weitgehend Wissen der ionischen Periode, insbesondere der Pythagoreer.
- II Grundlagen des algebraischen Operierens mit geometrischen Größen (Strecken, Flächen, Volumina), ebenfalls pythagoreisches Gedanken-
gut, üblicherweise als Reaktion auf die Entdeckung inkommensurabler

Streckenpaare gedeutet. Die Konsequenz war die Hinwendung zu einem geometrischen Größenbegriff. Der am Ende des 19. Jhs. von dem dänischen Mathematikhistoriker H. G. Zeuthen hierfür vorgeschlagene Terminus „geometrische Algebra“ hat sich weitgehend durchgesetzt.

III Kreislehre, vermutlich pythagoreisch.

IV Konstruktion ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke.

V Die Proportionentheorie des Eudoxos in ihrer allgemeinen, d.h. nicht auf geometrische Größen beschränkten Form.

VI Anwendung der Proportionentheorie auf ebene Geometrie.

VII – IX Sätze über natürliche Zahlen, hier im folgenden nicht weiter berücksichtigt.

X Eine sehr anspruchsvolle algebraische Theorie der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen, insbesondere Klassifikation nach der Zahl der (modern formuliert) ineinandergeschachtelten Quadratwurzeln, die zu ihrer Erzeugung notwendig sind. Vermutlich auf Theaitetos zurückgehend.

XI Elementares zur räumlichen Geometrie.

XII Sätze über Volumina, zum Teil von Eudoxos (vgl. Aufg. 2.3.1).

XIII Konstruktion der fünf regulären Polyeder aus dem Radius der Umkugel (nach Theaitetos), wobei die Ergebnisse von Buch X zur Charakterisierung der jeweiligen Kantenlängen herangezogen werden. Buch XIII schließt mit dem (relativ trivialen) Nachweis, daß es außer den behandelten fünf keine weiteren regulären Polyeder gibt (vgl. Aufg. 2.3.2).

Abgesehen von den Vorarbeiten der genannten Quellen (ionische Mathematiker wie Thales, Oinopides, Hippokrates, Leon, Pythagoreer, Eudoxos, Theaitetos) wären Euklids „Elemente“ in der vorliegenden Form kaum vorstellbar ohne die Philosophie des Platon und ohne die Methodologie des Aristoteles. Erstere zeigt sich in der Art der Darstellung, die weder auf die materielle Welt noch auf irgendwelche Anwendungen explizit Bezug nimmt, möglicherweise auch in der Beschränkung der benutzten Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal. (Von den Instrumenten selbst ist freilich nirgends die Rede, nur von den mit ihnen erzeugbaren Objekten Strecke und Kreis.) Letztere betrifft

sowohl den deduktiven Aufbau als Ganzes als auch die Teilung der Voraussetzungen in Axiome (das sind Grundsätze allgemeiner Art, deren Wahrheit unbestreitbar ist) und Postulate (das sind theoriespezifische Grundsätze, über deren Zulassung man verschiedener Meinung sein kann. Bei Euklid betreffen sie im wesentlichen die angenommene Ausführbarkeit gewisser konstruktiver Grundoperationen, aus denen alle Lösungen von Konstruktionsaufgaben kombiniert werden). Die meisten Bücher beginnen mit Definitionen, insbesondere Buch I. Einige dieser Definitionen reduzieren abgeleitete Begriffe in solcher Weise auf Grundbegriffe, wie es auch in der modernen Logik üblich ist, z. B. Def. I,17: Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; Def. I,23: Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner [Seite] einander treffen. Andere versuchen einen Grundbegriff zu beschreiben, z.B. Def. I,1: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Def. I,2: Eine Linie [ist eine] breitenlose Länge. Es ist klar, daß man mit „Definitionen“ dieser zweiten Art keinen mathematischen Satz über die definierten Begriffe beweisen kann. Sie sind also vom modernen Standpunkt unnötig und werden auch von Euklid selbst im weiteren nirgends benutzt. Diese Kritik setzt jedoch voraus, daß Euklid tatsächlich so etwas wie einen formal-axiomatischen Aufbau der Geometrie (etwa im Sinne von Hilberts berühmtem Buch „Grundlagen der Geometrie“ 1899) beabsichtigte, was keineswegs sicher ist. Andererseits haben Mathematiker, Philosophen und Übersetzer jahrhundertlang um diese Definitionen gestritten und sie zu verbessern versucht, wobei der Unterschied zwischen Definitionen der Art I,23 und solchen der Art I,1 meist unbeachtet blieb.

Angesichts so vieler Wurzeln und Quellen der „Elemente“ ist Euklid vielfach eigene wissenschaftliche Leistung abgesprochen, er als bloßer, wenn auch sehr erfolgreicher und geschickter „Lehrbuchschreiber“ und „Didaktiker“ dargestellt worden. Beides muß in Frage gestellt werden: Es gibt begründete Zweifel, ob Euklid den überlieferten Text selbst niedergeschrieben hat, ob sein Unterricht nicht, den Gebräuchen der Zeit entsprechend, ein mündlich-diskursiver war und der Text sich aus den Aufzeichnungen seiner Schüler entwickelt hat. In diesem Fall könnte Euklid ein guter Didaktiker gewesen sein, von dessen Unterricht aber nur die spröden Fakten aufgeschrieben wurden (wie es Studenten auch heute noch oft halten), und auch seine umstrittenen Definitionen wären eventuell nur die mißlungene stichpunktartige Niederschrift einer umfangreichen propädeutischen Erläuterung. Hat er die „Elemente“ jedoch selbst geschrieben, so ist natürlich die absolute Trockenheit des Stiles, die sture Aufeinanderfolge von Definition, Satz und Beweis, das Fehlen von Motivationen

und Beispielen zu bemängeln. Nicht wenige Didaktiker der Neuzeit, aber auch Schriftsteller unterschiedlichster Epochen, sahen in der Herrschaft Euklids im mathematischen Schulunterricht früherer Zeiten den Hauptgrund für die permanente Unbeliebtheit des Faches Mathematik. (Siehe z.B. [Fladt 1927], Auszug im Anhang, oder den polemischen Buchtitel „Los von Euklid“ [Kusserow 1928]).

Was die eigene wissenschaftliche Leistung Euklids betrifft, so muß man einerseits seine heute kaum noch bekannten sogenannten kleinen Schriften mit zu Rate ziehen, andererseits zeigt sich, daß der im folgenden näher erläuterte konstruktive Aspekt der „Elemente“ sich als roter Faden durch das sonst stofflich so heterogene Werk zieht. Man kann diesen Aspekt schwerlich den so unterschiedlichen Quellen zuschreiben. Hier ist ein origineller wissenschaftlicher Stil unverkennbar. Gerade aus der Sicht des ausgehenden 20. Jahrhunderts kann man in Euklid einen hervorragenden Pionier einer algorithmischen Kultur in der Mathematik sehen, die während langer Perioden verschüttet war und daher auch in Euklids Werk nicht gesucht, folglich nicht gesehen wurde².

Die Bausteine der Elemente, Propositionen genannt, gliedern sich in Lehrsätze mit folgendem Beweis und Aufgaben mit anschließender Lösung. Eine Aufgabe handelt stets von gegebenen Objekten (Punkte, Strecken, Kreise), über die gewisse Voraussetzungen gemacht werden, und gesuchten Objekten, die in bestimmten Beziehungen zu den gegebenen Objekten stehen sollen, z.B. Buch I, Prop. 2 (Übersetzung hier und im folgenden nach Thaer):

An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen, d.h. zu gegebenen Punkten A, B, C (B ungleich C) einen Punkt D konstruieren, so daß AD kongruent BC .

Die Lösung einer solchen Aufgabe besteht immer aus der Beschreibung eines Verfahrens (Algorithmus), dessen Eingabe die gegebenen Objekte und dessen

²Zum Beweis, daß diese Sicht auf Euklid heute von namhaften Mathematikern geteilt wird, zitieren wir aus dem Vorwort des Buches [Shamos/Preparata 1985] (deutsche Übersetzung PS): „Die übliche Meinung ist, daß Euklids Hauptbeitrag zur Geometrie die Darstellung der axiomatischen Beweismethode war. Darüber wollen wir hier nicht streiten. Relevanter für unser Thema ist die Erfindung der euklidischen Konstruktion, ein Schema, bestehend aus einem Algorithmus und seiner Rechtfertigung, miteinander auf hohem Niveau verbunden. Die euklidische Konstruktion erfüllt alle Bedingungen eines Algorithmus: Sie ist unzweideutig, korrekt und führt immer zum Ergebnis. Nach Euklid setzte sich die Blüte der Geometrie fort, während die Analysis von Algorithmen für die Dauer von 2000 Jahren verfiel. Dies kann besonders durch den Fortschritt der indirekten Beweistechnik illustriert werden, einer Technik, die den Existenzbeweis vereinfacht, aber die Angabe von Algorithmen umgeht.“

Ausgabe die gesuchten Objekte sind, und aus dem Beweis, daß dieser Algorithmus unter den über die gegebenen Objekte gemachten Voraussetzungen Objekte mit den gesuchten Eigenschaften liefert. Dieses Vorgehen ist nicht nur insgesamt paradigmatisch für alle Gebiete der Mathematik aller folgenden Zeiten, sondern es weist auch im Detail viele bemerkenswerte, in die Zukunft weisende Züge auf, von denen hier nur wenige diskutiert werden können.

Die zur Formulierung von Konstruktionsalgorithmen erlaubten Schritte werden in den (auf Definitionen und Axiome folgenden) Postulaten am Beginn von Buch I fixiert:

Gefordert soll sein

- 1) Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
 - 2) Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
 - 3) daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann [Thaer]
- ...

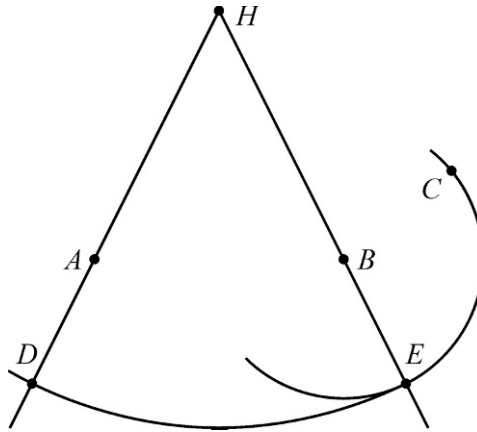


Abb. 2.3.1 Zu Proposition I.2 der „Elemente“ Euklids

In den ersten beiden Aufgaben wird dann gezeigt (ohne daß dies jedoch so erklärt wird), daß man die Operation, bei gegebenen Punkten A, B, C (B ungleich C) den Kreis vom Radius BC um A zu konstruieren, durch ein (modern gesprochen) „Unterprogramm“ auf die speziellere Operation reduzieren kann,

den Kreis um A durch B zu konstruieren, womit die sonst mehrdeutige Formulierung des 3. Postulates nachträglich geklärt ist. Dazu wird zunächst mittels der in I.1. gelösten Hilfsaufgabe (Unterprogramm!) ein Punkt H so konstruiert, daß A, B und H ein gleichseitiges Dreieck bilden. Man verlängere HA und HB über A bzw. B hinaus soweit, bis die folgenden Schnittpunkte gefunden werden: Derjenige Schnittpunkt E von HB mit dem Kreis um B vom Radius BC , der auf der H abgewandten Seite von B liegt, derjenige Schnittpunkt D von HA mit dem Kreis um H vom Radius HE , der auf der H abgewandten Seite von A liegt (Abb. 2.3.1). Man versteht nun die oben zitierte Proposition I.2: Da AD kongruent zu BC ist, entspricht der Kreis um A durch D dem Kreis um A mit dem Radius BC .

Algorithmen wurden auch in der altägyptischen und der altmesopotamischen Mathematik gelehrt, jedoch nur mittels Serien von numerischen Beispielen. Bei Euklid werden erstmals Algorithmen allgemein formuliert. Dazu benötigt man (modern gesprochen) Adressen für die Eingabeobjekte, Zwischenresultate, Ausgabeobjekte. Euklid benutzt große (griechische) Buchstaben für Punkte, adressiert Geraden mittels zweier auf ihnen angenommener Punkte und Kreise mittels dreier auf ihnen angenommener Punkte. Dies ist eine Pioniertat ohnegleichen, aber ein sachlicher Umstand trägt dazu bei: Geometrische Objekte sind — im Gegensatz zu Zahlen — an einen bestimmten Ort gebunden. Gibt man einem konkreten geometrischen Objekt einen Namen, so bezeichnet dieser Name allein das Objekt ohne ein zugehöriges Bild nicht — im Gegensatz zu den Zahlbezeichnungssystemen. Daher nehmen die Namen geometrischer Objekte, die in der Beschreibung eines Algorithmus unvermeidbar sind, sozusagen automatisch den Charakter von Variablen an. Es sei jedoch am Rande bemerkt, daß Euklid die von ihm für geometrische Algorithmen so erfolgreich entwickelte „Programmiertechnik“ auch in den zahlentheoretischen Büchern der „Elemente“ nutzt, um — auch hier erstmals unter Verwendung von Variablen — Algorithmen zur Lösung zahlentheoretischer Aufgaben wie z. B. den berühmten euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zu formulieren.

Der Begriff der unendlich ausgedehnten Geraden ist Euklid fremd. Es gibt nur gerade Strecken, die laut Postulat 1 als Verbindung ihrer Endpunkte konstruiert werden können und deren sukzessive Verlängerung durch das zweite Postulat als zulässige Elementaroperation deklariert wird. Während die Bestimmung der Schnittpunkte von Kreisen überall dort, wo ihre Existenz anschaulich evident ist, ohne theoretische (axiomatische) Rechtfertigung durchgeführt wird, ist die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden unter diesen Umständen eine echte Aufgabe, da ja von den Geraden nur Teilstrecken

schon konstruiert vorliegen, die man je nach gegenseitiger Lage unvorhersehbar oft verlängern muß, um schließlich zum Schnittpunkt zu gelangen. Es ist nur konsequent, wenn Euklid — in Analogie zu den anderen Grundoperationen — eine Voraussetzung formuliert, unter der diese Prozedur als ausführbar angenommen wird:

5. Postulat: Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind. (Abb. 2.3.2)

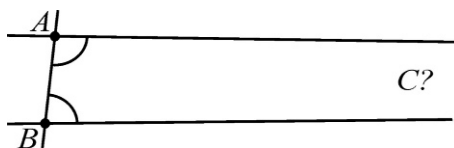


Abb. 2.3.2 Zum 5. Postulat der „Elemente“ Euklids

Proposition I.17 besagt, daß in jedem existierenden Dreieck die Summe zweier beliebiger Winkel stets kleiner als zwei Rechte ist, demnach die im 5. Postulat genannte Bedingung für die Existenz eines Schnittpunktes (der dann dritter Eckpunkt eines Dreiecks ABC ist) notwendig ist. Das 5. Postulat bereinigt also die sich hier möglicherweise auftuende Schwierigkeit mit der Festsetzung, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend sein soll. Leider wird sich nie feststellen lassen, ob Euklid und eventuell sogar schon seine Vorläufer hier wirklich ein Problem erkannt und tief darüber nachgedacht hatten, oder ob das 5. Postulat sozusagen als Improvisation in die Welt kam. Jedenfalls führte seine gegenüber den anderen Postulaten auffallend kompliziertere Formulierung dazu, daß man schon in der Antike daran Kritik übte und versuchte, es als Satz zu beweisen. Über viele Zwischenstufen hat sich hieraus im 19. Jahrhundert schließlich die nichteuklidische Geometrie entwickelt, deren in den siebziger Jahren des 19. Jhs. bewiesene Widerspruchsfreiheit klarlegt, daß das 5. Postulat weder denknotwendig noch gar aus den übrigen Axiomen und Postulaten der euklidischen Geometrie beweisbar ist. Es muß auch noch bemerkt werden, daß sich — mit zunehmender Distanz zur Methodologie des Aristoteles — der Unterschied zwischen Axiomen und Postulaten zu verwischen begann. Postulate sind ja ausdrücklich diskutierbare, nicht denknotwendige Grundsätze,

die man akzeptieren oder verwerfen kann. Erst vor dem Hintergrund der Verdrängung des Unterschieds zwischen Axiomen und Postulaten (deren äußerer Ausdruck vom europäischen Mittelalter an die gelegentliche Umnummerierung des 5. Postulats als 11. Axiom war) ist die Äquivalenz des Postulats zu der heute üblichen (schon von Ptolemaios stammenden, aber vor allem durch John Playfair 1796 popularisierten) Formulierung der Eindeutigkeit der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt akzeptabel. Als Axiome sind beide Aussagen in der Tat gleichwertig, d.h. jede mit Hilfe der anderen und der übrigen Axiome beweisbar. Als Postulat sagt Euklids Fünftes aber mehr aus, nämlich daß die Ausführbarkeit der betreffenden Operation angenommen wird, d.h. daß der zyklische Prozeß der wiederholten Verlängerung der beiden Strecken unter der angegebenen Voraussetzung stets einen Schnittpunkt liefert (Zur Verdeutlichung: Man könnte mit guten Gründen auch die Ausführbarkeit der Linealoperation, Postulat 1, unter der dort angegebenen schwachen Voraussetzung ablehnen, z.B. weil die Punkte zu dicht beieinander oder zu weit voneinander entfernt sind, ohne daß die Gültigkeit des Satzes über die eindeutige Existenz der Verbindungsgeraden dadurch angetastet werden muß.)

Was den weiteren geometrischen Inhalt der Elemente betrifft, so wird vieles genauso und genau in derselben Reihenfolge bewiesen, wie es auch heute noch üblich ist. Die bei Euklid verbleibenden Beweislücken beziehen sich fast immer auf Anordnungsfragen und lassen sich meist leicht schließen. Seine Beweisideen sind durchgängig brauchbar, oft trickreich, woraus man auf eine lange Reifung des Stoffes schließen könnte. Elementarstoff, den man gefühlsmäßig in den „Elementen“ vermutet (z.B. der vierte Kongruenzsatz oder die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise) findet sich dort häufig nicht, ist Zutat späterer Generationen. Lehrsätze erweisen sich bei genauer Betrachtung, auch der Stelle, an der sie erscheinen, oft als Sätze über Konstruktionsaufgaben, indem sie z.B. Voraussetzungen als notwendig oder Lösungen als eindeutig bestimmt nachweisen. Nach intensivem Studium kann man zu der Meinung gelangen (aber dies ist subjektiv), daß hier keineswegs eine „Enzyklopädie“ alles bis dahin Bekannten beabsichtigt war, vielmehr ein — reichlich konstruktivistisches — wissenschaftliches Programm exemplarisch demonstriert werden sollte, bei dem insbesondere im Bereich der Geometrie die Leistungsfähigkeit des „Programmpakets“ Zirkel und Lineal ausgeschöpft wurde. Der überwältigende Einfluß, den Euklids „Elemente“ auf spätere Zeiten ausgeübt haben, hat das Bild der antiken Geometrie insgesamt ein wenig deformiert. Zirkel und Lineal haben dort nicht die dominierende Rolle gespielt, die die „Elemente“ suggerieren. Von Kegelschnitten, anderen speziellen Kurven verschiedenster Art,

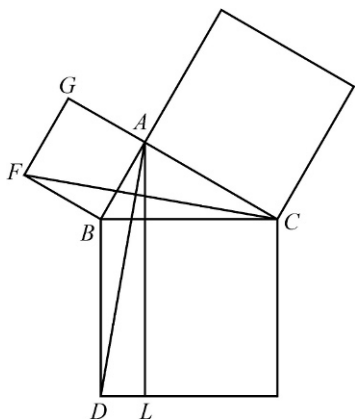
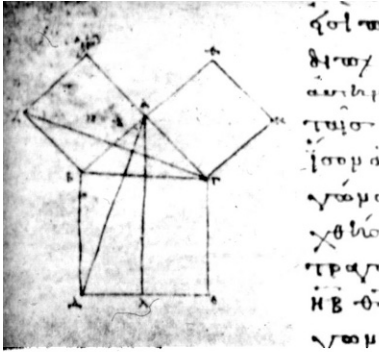


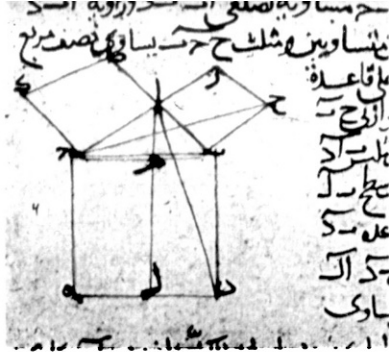
Abb. 2.3.3 Figur zum euklidischen Beweis des Kathetensatzes; Tafel mit Figur zum Beweis des Satzes von Pythagoras vor dem Zeughaus in Berlin [Foto Hollewood Media]

approximativen Methoden der Inhaltsbestimmung und anderen wesentlichen Inhalten der antiken Geometrie erfährt man in den „Elementen“ nichts.

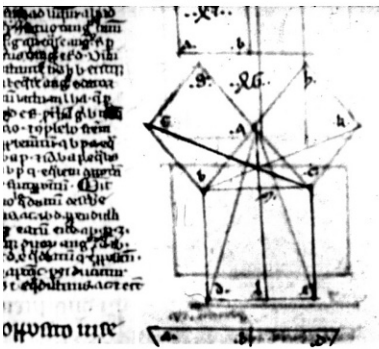
Zu den vielbewunderten didaktischen Kunstgriffen Euklids zählt sein Beweis des Kathetensatzes für rechtwinklige Dreiecke, aus dem sich dann leicht der Satz des Pythagoras ergibt. Die Schwierigkeit bestand darin, daß der übliche und wahrscheinlich schon den Pythagoreern bekannte Beweis über die Ähnlichkeit der Teildreiecke zum Gesamtdreieck Sätze über Ähnlichkeit von Dreiecken und damit Proportionenlehre erfordert. Die eudoxische Proportionenlehre zählt aber zu den anspruchsvollsten Teilen der „Elemente“ und wird erst in Buch V behandelt. Der Satz des Pythagoras sollte dagegen möglichst früh zur Verfügung stehen. Zu Euklids proportionsfreiem Beweis gehört Abb. 2.3.3 (siehe auch 2.3.4). Die Dreiecke ADB und FCB sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, also flächengleich. Da, wie zuvor bewiesen, jedes Dreieck auch jedem Rechteck aus einer Dreiecksseite und der halben zugehörigen Höhe flächengleich ist, ist Dreieck ADB flächengleich dem halben Rechteck aus Grundseite DB und Höhe DL, Dreieck FCB flächengleich dem halben Rechteck aus Grundseite FB und Höhe FG. (Schülern fällt es erfahrungsgemäß schwer, Dreieck FCB aus dieser ungewöhnlichen Perspektive zu betrachten, d.h. die zur Basis FB gehörige Höhe zu finden!) Insgesamt ergibt sich mit den üblichen Bezeichnungen $b = AB$, $c = BC$, $p = DL$: $b^2 = pc$. Der Leser sei aufgefordert, diesen schönen Beweisgedanken an den jeweils passenden Stellen abzurunden mit dem Verweis auf das jeweils benutzte der Axiome.



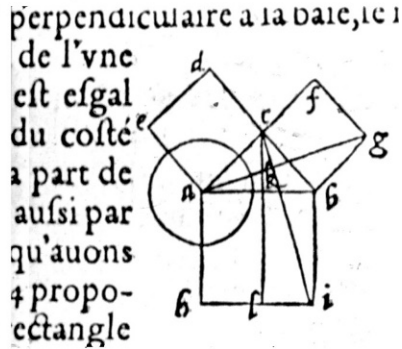
a) Griechisch, ca. 800



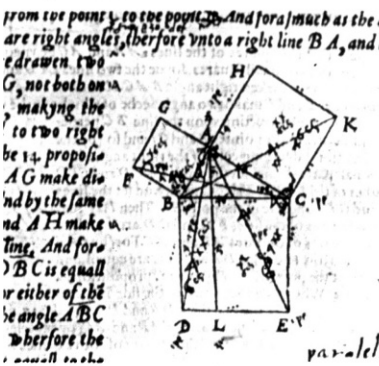
d) Arabisch, ca. 1250



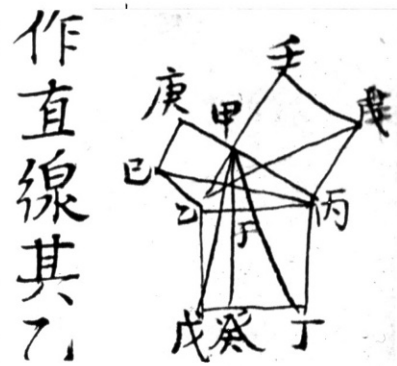
b) Lateinisch, 1120



e) Französisch, 1564



c) Englisch, 1570



f) Chinesisch, 1607

Abb. 2.3.4 Die gleiche Figur in verschiedenen Ausgaben der „Elemente“

[a) Ms. Vat. grec. 204; b) Adelard von Bath; c) Billingsley, London 1570;

d) sog. Pseudo-Tusi; e) Forcadel, Paris 1564; f) Ricci]

- 1) Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
- 5) Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
- 7) Was einander deckt, ist einander gleich.

Auf diesem Wege erhält man tatsächlich einen proportionsfreien Beweis für den Satz des Pythagoras. Allerdings muß man scharf hinsehen, was man tatsächlich bewiesen hat:

Das Quadrat über der Hypotenuse ist zerlegungsleich der Vereinigung aus den beiden Quadraten über den Katheten.

Vom Flächen*inhalt* darf nicht die Rede sein, sonst kommen die Proportionen hintenherum wieder herein. Um diesen nämlich zu definieren, muß man beweisen, daß das Produkt aus Grundseite und Höhe eines Dreiecks eine von der Auswahl der Grundseite unabhängige Größe ist, d.h. (Abb. 2.3.5) $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ bzw. $a : h_b = b : h_a$, was nur aus der Ähnlichkeit der beteiligten Dreiecke folgt.

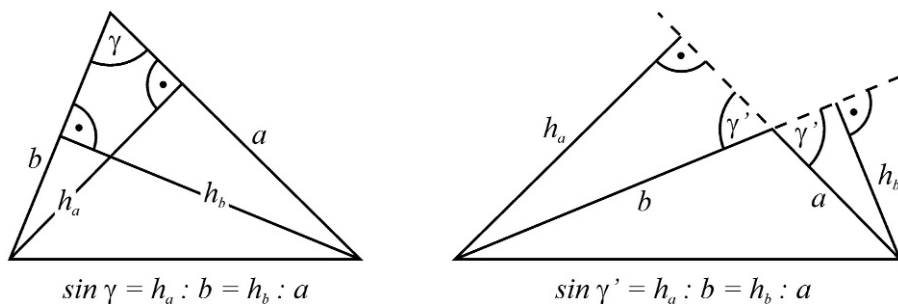


Abb. 2.3.5 Zur Unabhängigkeit des Produkts Seite mal Höhe im Dreieck

Das älteste bekannte Pergamentmanuskript der „Elemente“ (D’Orville 301 nach einem früheren Besitzer genannt und heute in der Bodleian Library in Oxford aufbewahrt) wurde in Byzanz geschrieben und zwar im Jahre 888, also rund 1200 Jahre nach der vermutlichen Entstehungszeit der „Elemente“. Es repräsentiert, wie man heute weiß, eine Textfassung, die von dem alexandrinischen Mathematiker Theon um 370 verfaßt wurde. Erst 1808 wurde in der Bibliothek des Vatikans eine zwar jüngere Handschrift (aus dem 10. Jh.) gefunden, die aber einen älteren Textzustand wiedergibt und den modernen Ausgaben der „Elemente“ stets zugrundeliegt (Abb. 2.3.6). Auch dieser Text ist jedoch wahrscheinlich nicht der „ursprüngliche“ (falls es einen solchen

je gegeben hat). Insgesamt hat man bisher rund 120 Zeilen Text auf Scherben und Papyrusfragmenten gefunden, die wesentlich älter als die genannten Manuskripte sind, dem Inhalt nach zu den „Elementen“ gehören, jedoch im Wortlaut stets vom heute als „kanonisch“ geltenden Text abweichen.



Abb. 2.3.6 Eine Seite aus Manuskript P der Vaticana [Codex Vat. Grec. 190]

Die „Elemente“ stellen ein Kulturgut ersten Ranges dar, dem zu allen Zeiten gebührende Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Der Umgang mit ihm war jedoch stets zweigeteilt: Die einen (es wäre zu einfach zu sagen: die Mathematiker) setzten sich ohne übergroßen Respekt vor dem Wortlaut mit dem Inhalt auseinander, ließen sich davon anregen, entwickelten ihn weiter. Jede Zeit fand neue interessante Seiten der „Elemente“, eine sehr moderne Sicht wurde oben dargelegt. Die anderen behandelten die „Elemente“ als Bildungsgut, als Material für Sprachstudien, als Lesetext, als historisches Dokument, jagten dem Phantom des authentischen Wortlauts nach. Eine Schwierigkeit besteht in der ausgeprägten Vieldeutigkeit der altgriechischen Sprache. Wer sich nicht in den Sinn des Gemeinten versetzen kann (und wer könnte beweisen, daß ihm das gelungen ist!) hat wenig Chancen, eine gelungene Übersetzung oder gar Deutung zustande zu bringen. Aber um es ganz deutlich zu sagen: Beide Formen der Beschäftigung mit den „Elementen“ sind legitim, beiden hat die Mathematik wie auch ihre Historiographie viel zu verdanken.

2.3.2 Die sonstigen geometrischen Schriften Euklids

Außer den „Elementen“ werden dem Euklid einige kleinere Werke zugeschrieben, die zum Teil in griechisch oder arabisch erhalten blieben, zum Teil verloren sind, zum Teil von der modernen Forschung als „unecht“, d.h. nicht von Euklid stammend, bezeichnet werden. Einige dieser Schriften wurden jahrhundertlang zusammen mit den „Elementen“ studiert, übersetzt, gedruckt und gehörten genauso zum allgemeinen mathematischen Bildungsgut wie die „Elemente“ selbst. Heute ist sogar ihre Existenz meist nur Spezialisten bekannt, und sie sind zum Teil schwer zugänglich, da sie zwar in der griech.-lat. Standardausgabe der Werke Euklids von Heiberg/Menge enthalten sind, aber kaum in moderne Sprachen übersetzt oder neu gedruckt wurden. Ihre Kenntnis ist aber für ein abgerundetes Bild der Persönlichkeit und Leistung Euklids wesentlich, und genau wie die „Elemente“ bergen auch sie manchen für die moderne Mathematik anregenden Gedanken. Eine vollständige Übersicht findet man in [Schreiber 1987] und dem Euklid-Artikel in [Wußing/Arnold 1989]. Hier werden nur diejenigen Schriften kurz vorgestellt, die im weiteren Sinn zur Geometrie gehören. Das sind

- eine verlorene Kegelschnittslehre, deren Inhalt vermutlich ungefähr den ersten 4 Büchern der hier später zu besprechenden Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge entsprach, (Wahrscheinlich hat letztere, weitergehende, die „Konika“ des Euklid in ähnlicher Weise verdrängt wie die „Elemente“ einige Werke gleichen Titels von früheren Verfassern verdrängt haben.)

- eine verlorene Schrift über geometrische Örter im Raum, (Dabei könnte es sich um Flächen wie Ebene, Kugel und Rotationsellipsoid im Raum oder auch um Örter, d.h. Kurven, auf solchen Flächen handeln.)
- eine Katoptrik, d.h. Lehre von Spiegeln und Spiegelbildern, von der heute klar ist, daß der erhaltene Text nicht von Euklid stammt, obwohl Euklid nach dem Zeugnis spätantiker Berichterstatter eine „Katoptrik“ verfaßt haben soll,
- eine Schrift „Phainomena“ über die Anfänge einer auf die Bedürfnisse der Astronomie zugeschnittenen sphärischen Geometrie,
- eine Schrift „Data“, eine „Optika“, eine Schrift „Über Teilungen von Figuren“ und eine verlorene Schrift „Porismen“.

Über die vier letztgenannten soll etwas ausführlicher berichtet werden. Aber schon die Titelübersicht zeigt, daß Euklid nicht der war, als der er in der neueren mathematikhistorischen Literatur gern dargestellt wird. Seine Schriften überdecken bis auf Bauwesen und Geographie praktisch alle Gebiete damaliger angewandter Mathematik.

Die „Data“ (griech. Dedomena, d.h. Gegebenes) stehen in engstem Zusammenhang mit den „Elementen“ und wurden bis zum Beginn der Neuzeit sehr oft mit diesen zusammen gedruckt. Von ihnen gibt es eine moderne deutsche Übersetzung [Thaer 1962]. Auf den ersten Blick bieten sie gegenüber den „Elementen“ wenig Neues, scheinen eine Art Kompendium zu sein und wurden auch meist so gedeutet. Es scheint jedoch, als habe Euklid hier versucht, Konstruktionsaufgaben zu behandeln, deren gegebene Objekte nicht wie in den „Elementen“ Punkte, Strecken und Kreise, also nach griechischer Auffassung sinnlich wahrnehmbare Dinge, sondern Äquivalenzklassen solcher Dinge bezüglich verschiedener Äquivalenzrelationen sind. Er beginnt nämlich damit zu definieren, wann ein geometrisches Objekt der Größe nach, der Gestalt nach, der Lage nach gegeben ist. Die Propositionen sind dann von folgender Art, z.B. Prop. 39:

Sind alle Seiten eines Dreiecks der Größe nach gegeben, so ist das Dreieck der Gestalt nach gegeben.

Das kann man so interpretieren:

Es seien drei „Längen“ gegeben, jede natürlich durch eine konkrete Strecke, d.h. einen Repräsentanten der betreffenden Äquivalenzklasse von gleichlangen Strecken. Das zu konstruierende Objekt ist seinerseits eine Äquivalenzklasse, nämlich von kongruenten

Dreiecken. Aus den konkreten Repräsentanten konstruiere man wie in den „Elementen“ ein konkretes Dreieck als Repräsentant der gesuchten Klasse. Diese Aufgabe und ihre Lösung sind, wie man in der modernen Mathematik sagt, repräsentantenunabhängig, d.h. Änderung der Repräsentanten der gegebenen Klassen beeinflusst zwar das konkret erhaltene Ergebnis, aber nicht die Äquivalenzklasse, in der es liegt.

In analoger Weise werden in den Data u.a. Aufgaben über Verhältnisse behandelt, die ja auch — modern gesprochen — Äquivalenzklassen von Brüchen sind, so daß z.B. das Ergebnis der Aufgabe, zu Größen a, b, c (etwa Strecken oder Flächen) ein d mit $a : b = c : d$ zu finden, nicht von dem konkreten Repräsentanten (a, b) sondern nur von der Klasse aller zu (a, b) äquivalenten Paare (a', b') , eben dem Verhältnis, abhängt. Den Höhepunkt der theoretisch sehr anspruchsvollen, wenn auch in der praktischen Durchführung meist fast trivialen Schrift bildet die Auffassung des Begriffes der Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises als eines Abstraktums, das zwar durch das Produkt der Sehnenabschnitte einer beliebigen durch den Punkt gelegten Kreissehne gegeben ist, aber von der willkürlichen Wahl dieser Sehne nicht abhängt.

Die „Optik“ Euklids ist die älteste erhaltene Schrift zu diesem Thema. Damals war Optik etwa die „Geometrie des Sehens“. Sie beruhte auf der Erfahrung der geradlinigen Ausbreitung von „Sehstrahlen“ durch die Luft zwischen Objekt und Auge, und obwohl es schon zwei entgegengesetzte Theorien über die Richtung dieser Sehstrahlen gab (bei Euklid wird die Richtung vom Auge zum Gegenstand angenommen), spielte dies für die bearbeiteten geometrischen Fragen natürlich keine Rolle. In einem vielhundertjährigen Prozeß wandelte sich der Begriffsinhalt der Optik allmählich: Während „Dioptrik“ noch im 1. Jh. nach Chr. lediglich die Lehre vom Peilen mittels „Dioptr“ ist, wird daraus schließlich die Lehre vom Durchgang der Sehstrahlen durch die Grenzschichten zwischen unterschiedlichen Medien. Im islamischen und europäischen Mittelalter treten Fragen der Anatomie und Physiologie des Auges hinzu, auch psychologische Fragen des Sehens wie z.B. eine ausgedehnte Klassifikation optischer Täuschungen. Erst sehr spät, etwa seit Kepler, wird Optik zu einem Teilgebiet der Physik und insbesondere zur Lehre von der Natur des Lichtes und seiner Ausbreitung.

Ist Euklids „Optik“ aus der Sicht heutiger Optik einerseits ungeheuer primitiv, so enthält sie andererseits einen großartigen wissenschaftlichen Gedanken, der wieder — wie fast immer bei Euklid — nur exemplarisch demonstriert und offensichtlich von denen, die er nicht mehr persönlich in seine Gedankenwelt einführen konnte, nicht verstanden wurde. Euklid zeigt an vielen, geometrisch

meist sehr elementaren Beispielen, was man aus dem unmittelbar Beobachtbaren (das sind hier die Sehwinkel) mit mathematischen Mitteln über das Beobachtete erschließen, aber auch was man nicht erschließen kann (Aufgabe 2.3.5). Dabei läßt er keinen Zweifel, daß er dies zunächst als eine geometrische Hilfswissenschaft für die Astronomie konzipiert. Die scharfsinnigen Schlüsse des Aristarch von Samos (vgl. 2.4.1) sind ganz in diesem Sinne, und die Lebensdaten und -umstände beider schließen nicht aus, daß Aristarch noch ein direkter Schüler von Euklid gewesen sein könnte. (Mehr Details zu Euklids „Optik“ in [Schreiber 1995].)

Die Schrift „Über Teilungen“ ist nur in einer arabischen Fassung überliefert, in der alle 36 Aufgaben, aber nur von den vier wohl interessantesten auch die Lösungen enthalten sind (siehe hier Aufgabe 2.3.3). Es geht darum, gewisse elementargeometrische Figuren durch gerade Schnitte, die gewissen Nebenbedingungen genügen (z.B. durch einen gegebenen Punkt gehen) in gegebenen Verhältnissen des Flächeninhalts zu „zerschneiden“. Einige der Aufgaben sind hervorragend dazu geeignet, zu verstehen, in welcher Weise die in Buch II der „Elemente“ systematisch gelehrt geometrische Algebra dazu dienen kann, in einer zur späteren kartesischen Koordinatenmethode analogen Art über Analyse und Synthese die Lösung einer Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu finden. Andere erfordern einen scharfsinnigen Trick, sind zum Teil nur dazu gestellt, diesen Trick zu präsentieren (Aufgabe 2.3.4). Alle miteinander haben eigentlich keine echte praktische Bedeutung. Umso erstaunlicher ist es, daß sie über Jahrhunderte zum Standardinhalt von Schriften über praktische Geometrie (Feldmeßkunst u.ä.) zählten. (Mehr Details in [Schreiber 1987, 1994].)

Die Schrift „Porismen“ zählt zu den verlorenen. Wir wissen von ihrer Existenz und einiges über ihren Inhalt aus den Berichten von Pappos und Proklos, aber sowohl ihr eigentlicher Sinn als auch die Bedeutung des Ausdrucks „Porisma“ sind weitgehend ungeklärt, trotz vieler Versuche namhafter Mathematiker (u.a. Fermat und Chasles), dies zu rekonstruieren. Aus der Beschreibung, die Pappos im VII. Buch seiner „Synagoge“ (lat. Collectio) gibt, geht zumindest hervor, daß u.a. im wesentlichen der Satz von Desargues enthalten war, jedoch in einer eigentümlichen dynamischen Formulierung:

Hält man von 6 Punkten A, B, C, P, Q, R , von denen P, Q, R ; A, B, P sowie B, C, Q und A, C, R je auf einer gemeinsamen Geraden liegen, P, Q, R fest und bewegt A und B längs zweier Geraden, so bewegt sich auch C auf einer Geraden (Abb. 2.3.7).

Man könnte daraus schließen, daß Euklid in den „Porismen“ mittels geometrischer Figuren so etwas wie funktionale Zusammenhänge erfassen wollte, indem er einige Teile der Figur (wir würden sagen: Parameter) festhält, einige (wir würden sagen: die unabhängigen Veränderlichen) einer willkürlichen

Veränderung unterwirft und die Art, wie die restlichen Teile der Figur (die abhängigen Veränderlichen) sich daraufhin verhalten, als eine Art Lehrsatz ausspricht. Aber um diese Hypothese ernsthaft aufzustellen, wissen wir leider viel zu wenig über den ursprünglichen Inhalt. Schon Pappos fügt nämlich verschiedene Sätze Euklids zu einem zusammen und verallgemeinert ihn dann auch noch, so daß sich seine eigene Zutat kaum von Euklids Absicht trennen läßt.

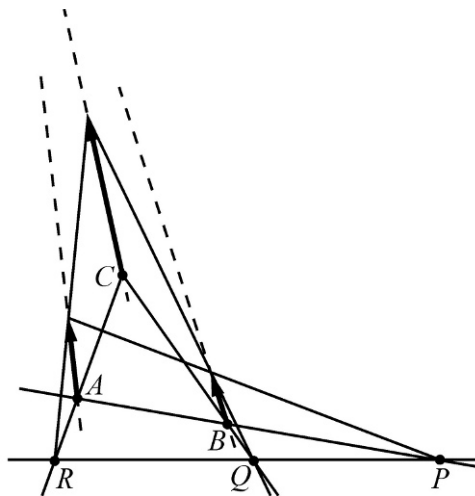


Abb. 2.3.7 Satz von Desargues in der Fassung von Euklid/Pappos

2.4 Alexandrinische (hellenistische) Periode

Unter dem von Aristoteles erzogenen Alexander dem Großen (356–323), der als Feldherr des korinthischen Bundes den Kampf gegen die Perser aufnahm, Kleinasien besetzte, Syrien, Ägypten und Palästina unterwarf, Babylon und Persien eroberte und bis nach Indien vorstieß, erfolgten zahlreiche Städtegründungen. Von ausschlaggebender Bedeutung für die Entwicklung der Wissenschaft und Mathematik wurde die 332/331 vorgenommene Gründung der Stadt Alexandria am Westrand des Nildeltas. Von 304 bis 30 v. Chr. hatte die makedonische Dynastie der Ptolemäer in dieser Stadt ihren Regierungssitz. Dem dortigen Museion, in dem Künstler und Gelehrte gemeinsam lebten und arbeiteten, war die berühmte Bibliothek von Alexandria angegliedert, die bedeutendste der ganzen Antike. In mehreren hunderttausend Buchrollen stand den Wissenschaftlern fast die gesamte bis in ihre Zeit verfaßte Litera-

tur als Arbeitsgrundlage zur Verfügung. So ist es nicht verwunderlich, daß in der Wissenschaftsgeschichte, neben der Bezeichnung „hellenistische Periode“ (abgeleitet vom Prozeß der Hellenisierung, dem Entstehen einer einheitlichen Kultur mit Griechisch als Weltsprache), auch von der alexandrinischen Periode gesprochen wird. Ihre Blütezeit reichte bis etwa zur Mitte des 2. Jhs. v. Chr.; der nachfolgende Niedergang der Wissenschaften am Ausgang der Antike wurde nur gelegentlich noch von bemerkenswerten Einzelleistungen aufgehehlt. Doch behielt Alexandria noch lange Zeit seine Attraktivität als Studienort.

Schon Euklid hat wahrscheinlich in der Bibliothek in Alexandria gearbeitet. Zu deren Direktoren gehörte auch Eratosthenes von Kyrene (276?–194?) — ihm gelang, basierend auf einer Gradmessung zwischen Alexandria und Syene (Assuan), eine erstaunlich genaue Bestimmung des Erdumfanges. Er war ein Zeitgenosse des Archimedes und etwa eine Generation älter als Apollonios. Euklid, Archimedes und Apollonios bilden das herausragende Dreigestirn des goldenen Zeitalters der griechischen Mathematik. Zeitlich zwischen Euklid und Archimedes fällt die Wirksamkeit von Aristarch, bekannt als der erste Astronom, der das heliozentrische Weltsystem formulierte — im 16. Jh. berief sich Copernicus auf diesen antiken Vorläufer, der auch eine Erwähnung in der Geschichte der Geometrie verdient.

2.4.1 Aristarch

In seiner Abhandlung „Über die Größen und Entfernungen von Sonne und Mond“ ging Aristarch von der Annahme aus, Sonne und Mond würden, vom Zentrum der Erde aus gesehen, unter dem gleichen Winkel erscheinen. Dann betrachtete er die Situation des Halbmondes, wenn genau 50 % der der Erde zugewandten Mondoberfläche von der Sonne beleuchtet sind: hier bilden die drei Himmelskörper ein Dreieck mit einem rechten Winkel im Mondzentrum. Den spitzen Winkel bei der Erde nahm er zu 87° an (in Wahrheit $89^\circ 50'$) und die Breite des Erdschattens da, wo ihn der Mond durchquert, zu zwei Mondbreiten. Die weiteren Überlegungen Aristarchs folgen in Aufbau und Strenge dem Vorbild Euklids, sind darüberhinaus aber auch deshalb von Interesse, weil sie im Grunde mit trigonometrischen Verhältnissen arbeiten. Diese Verhältnisse schätzte er in systematischer Weise ab, wie es nach ihm in ähnlicher Weise auch Archimedes in seiner Kreismessung tat. Aristarch verwendete zwei Sätze: 1) Ist α das Bogenmaß eines Winkels mit $\alpha < \pi/2$, dann nimmt das Verhältnis $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ab und das Verhältnis $\frac{\tan \alpha}{\alpha}$ zu, während α von 0 bis $\pi/2$ anwächst.

2) Ist β das Bogenmaß eines zweiten Winkels mit $\beta < \pi/2$ und $\alpha > \beta$, dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad (2.4.1)$$

Hierauf aufbauend, bewies er:

1. Die Entfernung Erde-Sonne ist größer als das 18fache, aber kleiner als das 20fache der Entfernung Erde-Mond.

2. In gleicher Weise verhält sich der Sonnendurchmesser zum Monddurchmesser.

3. Das Verhältnis des Sonnendurchmessers zum Erddurchmesser ist größer als $19 : 3$, aber kleiner als $43 : 6$.

Gaben auch die konkret ermittelten Werte, wie wir heute wissen, die wirklichen Verhältnisse nicht richtig wieder, so ist doch die Genialität bewundernswert, mit der Aristarch seine Methode entwickelte und durchführte (s. Aufgabe 2.4.1).

2.4.2 Archimedes

Archimedes (287?–212; vgl. Bd. 1, Abschn. 4.5), von vornehmer Abstammung, wuchs in der um 733 v. Chr. von den Korinthern am Ostufer Siziliens gegründeten Hafenstadt Syrakus auf, die sich immer wieder der Angriffe der Karthager erwehren mußte. Er war der Sohn eines Astronomen und hat vermutlich in Alexandria studiert, bevor er wieder in seine Heimatstadt zurückkehrte. Seine Arbeitsgebiete umfassen neben der Mathematik die Mechanik, die Optik, die Hydrostatik und die Technik — im 2. Punischen Krieg soll er durch die Konstruktion besonders wirksamer Waffen wesentlich zur zwei Jahre andauernden Verteidigung der Stadt gegen die Belagerung durch die Römer beigetragen haben. Entgegen dem Befehl des Heerführers Marcellus wurde der greise Archimedes bei der Einnahme von Syrakus im Jahre 212 v. Chr. von einem römischen Soldaten erschlagen — der legendären Überlieferung nach, als er mit dem Zeichnen einer geometrischen Figur beschäftigt war und dem herantretenden Römer zugerufen haben soll: „Störe meine Kreise nicht!“

Archimedes' wohl genialste Leistungen gehören der Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung an. In einer Eratosthenes gewidmeten Schrift über die Methode, die erst 1906 in einer im 10. Jh. angefertigten Abschrift wiederentdeckt wurde, erläuterte er seine auf mechanischen Überlegungen basierenden heuristischen Methoden zur Flächen- und Voluminabestimmung. (Die Abschrift ist ein sog. Palimpsest, eine Pergamenthandschrift, deren Text im 13. Jh. abgewaschen und neu überschrieben wurde. Glücklicherweise ließ sich der Archimedes-Text dennoch entziffern. Diese einmalige Handschrift wechselte am 29. Okt. 1998 in

einer spektakulären Auktion ihren Besitzer zum stolzen Preis von zwei Millionen Dollar! [Archimedes h])

Geometrie als solche bildete keinen Schwerpunkt im Schaffen des Archimedes, hatte freilich bei der Untersuchung infinitesimaler Probleme (wie z.B. der Parabelquadratur) eine unentbehrliche Hilfsfunktion zu übernehmen. Ganz dem Bereich der Geometrie kann man nur die leider verlorene Untersuchung über halbgelmäßige Polyeder zurechnen. Als Beispiel, wie Archimedes geometrische Überlegungen in seinen Untersuchungen einsetzte, sei die Abhandlung über die Spiralen erwähnt [Archimedes g]. Archimedes widmete diese Untersuchung dem Mathematiker Dositheos, wobei er in einer als Brief an diesen formulierten Einleitung zunächst auf andere Arbeiten und früher übersandte Beweise einging (man vgl. den Auszug im Anhang A.2 [Archimedes g, S.7]). Dann fuhr er fort:

„Nächst dem handelt es sich um folgende Probleme über die Spirale... , für welche ich dir in diesem Buche die Beweise aufgeschrieben habe. Es sind aber diese: Wenn ein Halbstrahl sich innerhalb einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, bis er wieder in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, gleichzeitig sich aber ein Punkt auf diesem Halbstrahl mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Endpunkt des Halbstrahls aus bewegt, so wird der Punkt eine Spirale beschreiben. Ich behaupte nun, daß das Flächenstück, das von der Spirale und der Anfangslage des Halbstrahls begrenzt wird, der dritte Teil ist des Inhaltes des Kreises, dessen Mittelpunkt der feste Endpunkt des Halbstrahls ist, und dessen Radius die Entfernung des beweglichen Punktes nach vollendeter Drehung von diesem Punkte ist...“

Als erste Beobachtung ist festzuhalten, daß Archimedes die (heute nach ihm benannte) Spirale bewegungsgeometrisch definiert als Kombination einer Rotations- mit einer linearen Bewegung — mit Zirkel und Lineal läßt sich diese „mechanisch“ erzeugbare Kurve nicht konstruieren. Sodann bemerkt man, daß bereits der erste von ihm zitierte Satz eigentlich der Integralrechnung zuzurechnen ist. Denn übersetzt man die Definition in die Gleichung

$$r = a\phi, \quad (2.4.2)$$

so behauptet er ja (da ein infinitesimales Flächenstück in Polarkoordinaten als Dreieck die Größe $\frac{1}{2}r \cdot r d\phi$ hat):

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \phi^2 d\phi = \frac{4}{3} \pi^3 a^2. \quad (2.4.3)$$

Der feste Endpunkt des Halbstrahls nach einer Umdrehung hat den Abstand $2a\pi$ vom Zentrum, der genannte Kreis also die Fläche $4\pi^3 a^2$, womit diese Behauptung des Archimedes bestätigt ist.

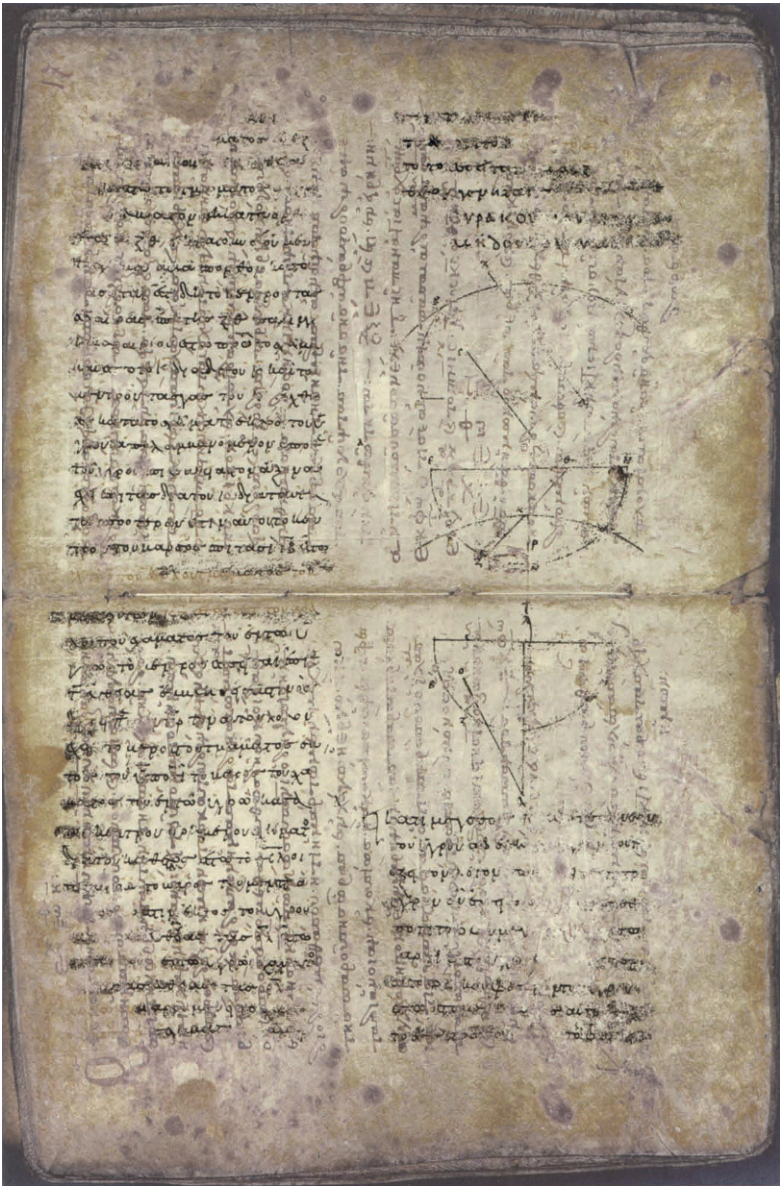


Abb. 2.4.1 Manuskriptseite aus dem Archimedes-Palimpsest
[Auktionskatalog der Fa. Christies, New York 1998]

Auch die Tangente an die Spirale wurde von Archimedes studiert (vgl. Aufgabe 2.4.2). Zeichnet man senkrecht zu einem Radiusvektor $r = OP$ durch das Zentrum O eine Gerade und denkt sich im Kurvenpunkt P die Tangente $t = PT$ gezeichnet, wobei T ihr Schnittpunkt mit dieser Geraden sei, so wird die Strecke PT als polare Subtangente s_t bezeichnet. Archimedes wies nach, daß $s_t = \frac{r^2}{a}$ gilt.

Obgleich die Zuweisung an Archimedes nicht gesichert ist, sei hier noch auf die nur arabisch überlieferte Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks hingewiesen. Das regelmäßige Dreieck, Viereck (= Quadrat), Fünfeck und Sechseck lassen sich bekanntlich mit Zirkel und Lineal in einen gegebenen Kreis einbeschreiben. Das geht beim Siebeneck nicht mehr — algebraisch führt die Teilung des Kreises in sieben gleiche Teile auf eine kubische Gleichung und gehört daher der gleichen Problemklasse an wie die Würfelverdoppelung und die Winkeldreiteilung. Die angeblich von Archimedes gefundene Konstruktion arbeitet zwar auch nur mit diesen beiden Geräten, verwendet das Lineal allerdings in einer in der euklidischen Geometrie nicht erlaubten Weise: es wird solange um einen festen Punkt gedreht, bis zwei Dreiecke, von denen eines bei der Drehung anwächst, während das andere abnimmt, flächengleich sind [Scriba 1992]. Es ist dies ein besonderer Typus einer Einschiebungskonstruktion oder sog. Neusis. Das angewandte Verfahren ist verblüffend und theoretisch reizvoll, aber nicht praktisch anwendbar.

2.4.3 Apollonios

Fast eine Generation jünger ist Apollonios von Perge (260? – 190?; vgl. Bd. 1, Abschnitt 4.5). Auch er studierte in Alexandria bei den Nachfolgern des Euklid und arbeitete dort lange Zeit. Wie schon erwähnt, verdrängte seine Kegelschnittlehre die älteren Darstellungen. Nur die ersten vier Bücher (= Kapitel) sind griechisch überliefert, drei weitere in arabischer Übersetzung; das letzte Buch ist nicht erhalten. Im Gegensatz zu Euklid erläuterte Apollonios in Vorworten zu den einzelnen Büchern seine Absichten, darin dem Vorgehen von Archimedes folgend. Das Werk beginnt in Form eines an Eudemos gerichteten Briefes:

„Apollonios grüßt Eudemos.

Falls du bei guter Gesundheit bist und auch sonst sich die Umstände so verhalten, wie du es dir wünschst, ist es gut. Auch ich kann im allgemeinen nicht klagen. In der Zeit, die wir gemeinsam in Pergamon verbrachten, bemerkte ich dein großes Interesse, mit meinen Untersuchungen über die Kegelschnitte bekannt zu werden. Daher schicke ich dir das erste Buch, das ich inzwischen

überarbeitet habe; die weiteren werden folgen, wenn ich sie zu meiner Zufriedenheit beendet habe. Wie du dich erinnern wirst, berichtete ich dir damals, daß ich diese Untersuchungen seinerzeit auf Bitten des Geometers Naukrates aufnahm, als er mit mir in Alexandria zusammen war. Nachdem ich sie in acht Büchern niedergelegt hatte, gab ich sie ihm — sehr übereilt, da er im Begriff war, abzusegeln. Ich konnte sie daher nicht mehr sorgfältig überarbeiten, ja, ich hatte alles einfach so niedergeschrieben, wie es mir gerade in den Sinn kam, und die Revision zurückgestellt. Daher werde ich jetzt, wie es die Gelegenheit erlaubt, korrigierte Fassungen herausgeben. . .

Die ersten vier der acht Bücher enthalten eine elementare Einführung . . .

[Es folgt eine Inhaltsangabe dieser Bücher.]

Die restlichen Bücher enthalten Ergänzungen . . .

Wenn sie alle herausgegeben sind, steht es allen frei, sie zu lesen und sich ihr eigenes Urteil darüber zu bilden, je nach ihrem eigenen Geschmack.

Lebe wohl.“

In den Begleitbriefen zu späteren Büchern geht Apollonius teilweise ausführlicher auf die Vorgeschichte der behandelten Themen ein und hält fest, welche Teile Ergebnisse seiner eigenen Forschungen wiedergeben. Ein wichtiger Unterschied gegenüber den Vorgängern liegt in der Allgemeinheit, mit der Apollonios in den „Conica“ seine Sätze formuliert und beweist. Bewußt knüpft er an Euklid an, wenn er in den ersten vier Büchern die Elemente, also die Grundlagen der gesamten Kegelschnittlehre, systematisch errichtet, bevor er sich im zweiten Teil spezielleren Problemen zuwendet.

Apollonios erzeugt die verschiedenen Kegelschnitte alle an einem einzigen schiefen Kreiskegel (im Fall der Hyperbel über die Spitze hinaus zu einem Doppelkegel verlängert), indem er die ebenen Schnitte unter verschiedenen Winkeln vornimmt — wie wir sahen, hatte Aristaos die Kurven mittels senkrechter, an drei verschiedenen Kreiskegeln angebrachter Schnitte gewonnen. Dabei diskutierte Apollonios die geometrischen Beziehungen, die wir heute aus der Scheitelgleichung

$$y^2 = rx(1 \pm \frac{x}{t}) \quad (2.4.4)$$

der Kegelschnitte entnehmen würden (mit den Konstanten $r = \text{latus rectum}$, $t = \text{latus transversum}$). Daraus leiten sich auch die noch heute üblichen Namen ab: fehlt das zweite Glied auf der rechten Seite, hat man es mit einer reinen Flächenanlegung (griechisch: parabole) zu tun; fällt dieses Glied positiv aus, liegt eine Anlegung mit Überschuß (hyperbole) vor; ist es negativ, eine solche mit Mangel oder Defekt (elleipsis).

In dieser Form zum Ausdruck gebracht, lassen sich die drei Beziehungen nachträglich als die Koordinaten der drei (nicht-entarteten) Kegelschnitte in einem

schiefwinkligen Koordinatensystem interpretieren, wie es im 17. Jh. von Descartes eingeführt wurde. Dessen Achsen werden von einem der Durchmesser und der Tangente im Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt gebildet. Hatte Archimedes die Kegelschnittgleichungen als Verhältnisgleichungen definiert, so bediente sich also Apollonios — wie schon Menaichmos — der Tradition der Flächenanlegung aus dem 2. Buch Euklids. Nachdem er für jede der Kegelschnittkurven eine charakteristische Beziehung (symptoma) gewonnen hatte, brauchte Apollonios nicht mehr auf den stereometrischen Ursprung zurückzugreifen. Tangenten- und Asymptoteneigenschaften, die harmonischen Eigenschaften von Pol und Polare und Brennpunktbeziehungen der Kegelschnitte bilden den Inhalt der weiteren Untersuchungen. Da Apollonios zwischen der aus einem Ast bestehenden Hyperbel und ‘zwei zugehörigen Hyperbeln’ unterscheidet und den Kreis nichts als spezielle Ellipse unter diese subsumiert, formuliert er beispielsweise den Satz, der demjenigen über Pol und Polare nahe kommt, folgendermaßen:

Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts, eines Kreises oder zweier zugehöriger Hyperbeln eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, so wird diejenige Strecke auf ihr, die zwischen diesen Punkten liegt, durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten und den Tangentenschnittpunkt im gleichen Verhältnis geteilt³.

Im Gegensatz zu Euklids Elementen, die auch im Mittelalter und bis weit in die Neuzeit hinein (freilich oft nur auszugsweise) Grundlage des Geometrieunterrichtes bildeten, wurden die Conica des Apollonios zunächst nur im islamischen Bereich rezipiert. In Westeuropa erlangten sie erst wieder größere Bedeutung, nachdem im 17. Jh. Kepler die Ellipse als die wahre Bahn eines Planeten um die Sonne erkannt und Newton diese Bahnform aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz abgeleitet hatte.

Apollonios ist Autor einer Reihe weiterer Schriften, wovon aber nur die Verhältnisschnitte (in arabischer Übersetzung) erhalten sind. Verschiedene Abhandlungen über Schnitte handelten von Eigenschaften projektiver Punktreihen, eine andere von Einschiebungen. Auch untersuchte er das nach ihm

³Modern gesprochen bedeutet das: Bezeichnen P und Q die Berührungspunkte zweier Tangenten an einen Kegelschnitt, T ihren Schnittpunkt, R' den T nächstgelegenen, R den anderen Schnittpunkt einer Geraden durch T , welche den Kegelschnitt zweimal schneidet und ist S der Schnittpunkt der Geraden durch T mit der Geraden PQ , so wird die Strecke $R'R$ durch S und T innen und außen im gleichen Verhältnis, also harmonisch geteilt, d. h. es ist $RS : SR' = RT : TR'$.

benannte Problem, zu drei gegebenen Kreisen in der Ebene (oder ihren Ausartungen zu Punkten bzw. Geraden) mit Zirkel und Lineal diejenigen Kreise zu konstruieren, die die gegebenen berühren (vgl. Aufgabe 2.4.3).

In manchen seiner Beiträge knüpfte Apollonios an die Arbeiten von Archimedes an, so bei Untersuchungen über Brennspiegel (geometrische Optik) und bei solchen über die regelmäßigen Körper (wie wir sahen, hatte sich Archimedes mit den halbberegelten beschäftigt). Hier konnte er den Nachweis liefern, daß sich die Oberflächen des regelmäßigen Dodekaeders und Ikosaeders, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, wie ihre Volumina verhalten. In Form einer Bearbeitung des Hypsikles von Alexandria (um 180 v. Chr.) wurde diese Studie des Apollonios den Elementen Euklids als 14. Buch angehängt.

2.5 Spätantike, Rom und Byzanz

Nach den drei großen Theoretikern Euklid, Archimedes und Apollonios hat die hellenistische Welt keine Mathematiker mehr von wirklich vergleichbarem Rang hervorgebracht. Auch in den beiden diese ablösenden Kulturen, in Rom im Westen und in Byzanz im Osten, lassen sich gleich bedeutsame Namen nicht angeben. Daher erscheint es berechtigt, die Zeit ab der Mitte des 2. vorchristlichen Jahrhunderts bis zum Zerfall des römischen Reiches während der Völkerwanderung (3. bis 6. Jh. n. Chr.) zusammenzufassen. Schließlich soll auch die Spätblüte der Mathematik in Byzanz, die etwa vom 10. bis 14. Jh. anzusetzen ist, hier noch betrachtet werden, da sie sich — u. a. auch aus sprachlichen Gründen — in enger inhaltlicher Verbindung zur griechischen Mathematik entwickelte.

2.5.1 Heron

In Heron von Alexandria haben wir einen Mathematiker und Techniker vor uns, über dessen Biographie so wenig bekannt ist, daß man ihn irgendwo zwischen 150 v. Chr. und 200 n. Chr. (oder gar noch etwas später) datiert hat — heute nimmt man an, er habe gegen Ende des 1. Jhs. n. Chr. in Alexandria gewirkt. Ähnlich wie Archimedes hat er sich sowohl auf mechanisch-technischem wie auf mathematischem Gebiet betätigt, auf letzterem freilich bevorzugt unter praktischen Aspekten, so daß ein Vergleich mit dem genialen Theoretiker Archimedes ganz unangemessen wäre. Vielmehr war sein Schaffen enzyklopädisch angelegt und entsprach damit einer Tendenz der Zeit: dem Bestreben, das klassische Erbe zu sammeln und zu bewahren. Viele seiner Schriften und Vorlesungen fanden, oft stark überarbeitet, weite Verbreitung. Das lag nicht zuletzt an ihrem auf Anwendungen ausgerichteten Charakter,

146 v. Chr.	Römer zerstören Karthago und unterwerfen Griechenland	
47 v. Chr.		Brand der Bibliothek in Alexandria. Alexandria bleibt weiterhin Mittelpunkt griechisch-hellenistischer Kultur
44 v. Chr.	Ermordung Caesars	
27 v. – 14 n. Chr.	Oktavian als Augustus erster römischer Kaiser	Römisches Recht und römische Kultur bestimmen das Leben der Völker des Imperium Romanum
27 v. – 395 n. Chr.	Römisches Kaiserreich	
~ 7 v. – 30 n. Chr.	Jesus von Nazareth	Entwicklung der Feldmeßkunst und Kartographie
66 – 70 n. Chr.	Jüdischer Krieg, Zerstörung von Jerusalem unter Titus	Monumentale Baukunst (Kolosseum, Pantheon, Engelsburg, Palatin, Kaiserforen)
176 n. Chr.	Verbot der christlichen Religion im Römischen Reich	Wandmalereien, Mosaikkunst (Herkulaneum, Pompeji), Klassische Dichtung (Horaz, Vergil, Ovid), Geschichtsschreibung (Livius, Tacitus, Plinius d.Ä.)
290	Höhepunkt der Christenverfolgungen	
391	Christentum wird Staatsreligion im Römischen Reich	Erneuter Brand der Bibliothek in Alexandria
395	Teilung in weströmisches und oströmisches Reich	
476	Untergang des weströmischen Reiches	
529	Akademie in Athen durch Justinian geschlossen	Mathematiker sammeln und kommentieren frühere Ergebnisse in Konstantinopel (Byzanz)
1453	Eroberung Konstantinopels durch die Türken, Ende des oströmischen Reiches	

der dieser Epoche entgegenkam. So knüpfte Heron nicht nur an die klassische Tradition an (z.B. an die Elemente Euklids und an mehrere Schriften des Archimedes), sondern griff daneben auch auf die babylonisch-ägyptische Tradition zurück, wobei er manche nur näherungsweise gültige Verfahren übernahm bzw. weiterentwickelte. In einem (teilweise aus arabischen Erwähnungen bekannten) Euklid-Kommentar ersetzte Heron viele indirekte Beweise Euklids durch direkte.

Sein Werk „Metrika“ (der griechische Text wurde erst Ende des 19. Jhs. wieder aufgefunden) richtete sich vorwiegend an Praktiker. Darin werden, neben vielen Konstruktions- und Vermessungsvorschriften ebener und räumlicher Gebilde, z.B. zur Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln auch Näherungsrezepte angegeben, die den algorithmischen Aspekt hervorheben. Das 3. Buch (= Kapitel) behandelt die Teilung von Flächen und Körpern nach vorgeschriebenen Verhältnissen, darunter auch die Archimedische Kugelteilung.

Mit Herons Namen noch heute verbunden ist die heronische Dreiecksformel. Sind die drei Seiten a, b, c eines beliebigen Dreiecks gegeben, ermöglicht sie, unter Verwendung der Hilfsgröße $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ den Flächeninhalt Φ des Dreiecks ohne den Umweg über die Berechnung einer seiner Höhen zu ermitteln:

$$\Phi = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (2.5.1)$$

Obgleich heute nach Heron benannt, kannte schon Archimedes diese Formel. Zu dem von Heron gegebenen Beweis vgl. Aufg. 2.5.1. Wie Abb. 2.5.1 zeigt, bedient sich Heron des Inkreises des Dreiecks (Radius r); die drei von den Ecken aus zu dessen Mittelpunkt gezogenen Strecken zerlegen das Dreieck in drei Teildreiecke der Höhe r . Das Einfügen von zwei rechtwinkligen Dreiecken ermöglicht dann die Berechnung von r . Auf der abgebildeten Seite gehört, abgesehen von den beiden Figuren, nur der über diesen befindliche Schriftblock zum Heronschen Text; alles weitere sind Randglossen eines ebenfalls griechisch schreibenden Lesers; sie deuten an, welche Schwierigkeiten dieser hatte, als er sich bemühte, den Beweis zu verstehen. Ungewöhnlich für die damalige Zeit ist u.a., daß Heron im Beweisgang mit dem Produkt von vier Längen arbeitet (genauer gesagt: dem Produkt von zwei Flächen). Das erlaubt ihm, ohne Behinderung durch Quadratwurzeln zunächst das Quadrat der gesuchten Dreiecksfläche auszurechnen. Heron versäumt es, in diesem Fall alle erforderlichen Hilfssätze der Elemente Euklids zu zitieren; so erkannte z.B. der Scholiast nicht sofort, daß die Verbindungslinien der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises zugleich die Winkelhalbierenden sind! Auch führte ihn in die Irre, daß die beiden Figuren einen Spezialfall anzudeuten scheinen: ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck anstelle des allgemeinen Falles.

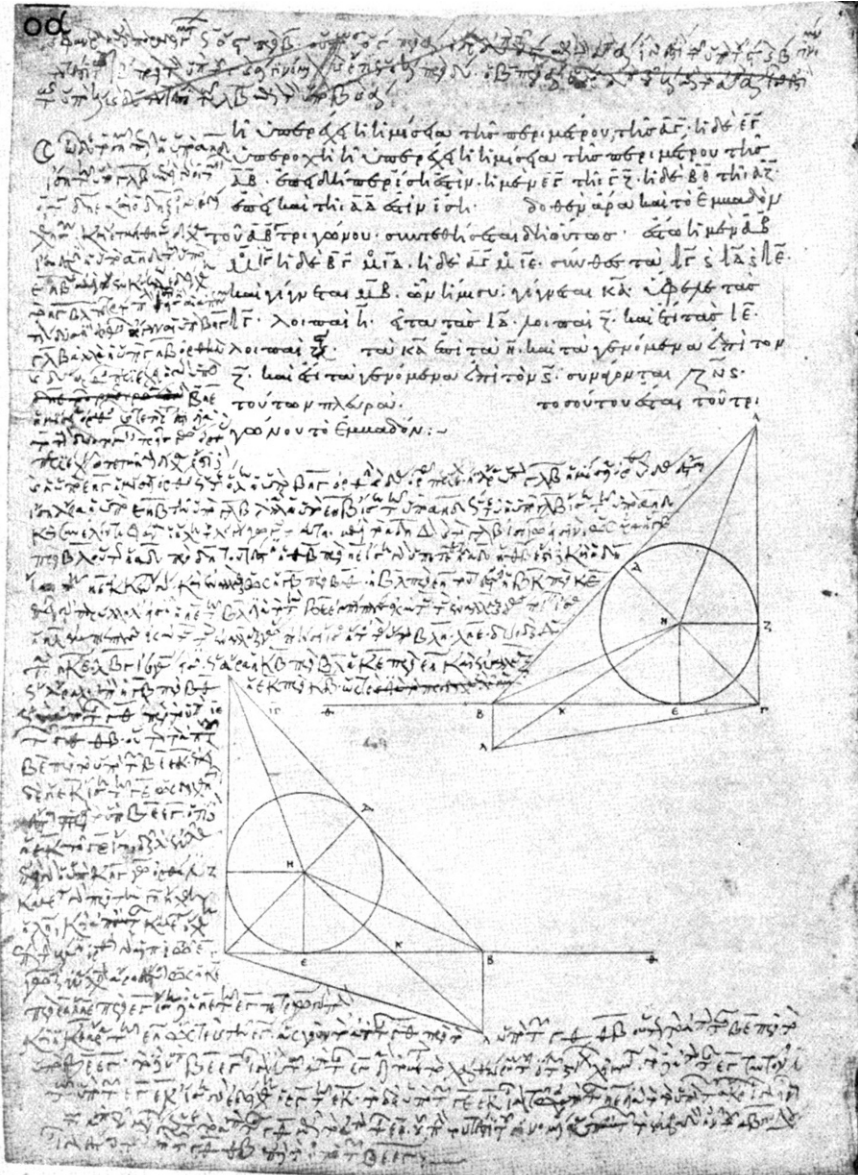


Abb. 2.5.1 Manuskriptseite aus Herons „Metrika“ mit dem Beweis der Dreiecksformel: Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 1 (11./12. Jh.), fol. 71v. [Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 1, ed. by E. M. Bruins. Part One: Reproduction of the Manuscript, S. 138. Leiden: E. J. Brill 1964.]

2.5.2 Pappos

Neben weiteren Mathematikern, die weniger auf geometrischem als auf anderen Gebieten tätig waren (wie z.B. der Zahlentheoretiker Diophantos, der vermutlich um 250 in Alexandria wirkte; vgl. Bd. 1, Abschnitt 4.5), und neben den Begründern der Trigonometrie, auf die weiter unten eingegangen wird, wirkte um 320, also in der Spätzeit, in Alexandria der für die Überlieferungsgeschichte bedeutsame Pappos. Er gehörte dem Kreis der alexandrinischen Neuplatoniker an. Seine „Collectiones“ sind ein Sammelwerk in acht Büchern; bis auf das erste und den Anfang des zweiten sind sie sämtlich erhalten. In der frühen Neuzeit entnahmen die europäischen Mathematiker den „Collectiones“ viele Anregungen, enthalten sie doch wichtige Auszüge aus (teils erhaltenen, teils verlorenen) Schriften von Euklid, Apollonios, Archimedes und anderen Mathematikern. Pappos erweiterte diese Auszüge um kritische Kommentare und bemerkenswerte eigene Zutaten.

Zu diesen gehören Sätze über projektive Gebilde, Bemerkungen zu Extremwertaufgaben und der sog. Guldinsche Schwerpunktsatz an Rotationskörpern (von Paul Guldin 1641 publiziert!). Pappos formulierte letzteren in einer für die Antike ganz ungewöhnlichen Allgemeinheit und bemerkte selbst dazu: „Diese Sätze, die in Wirklichkeit einer sind, umfassen eine beliebige Anzahl von Theoremen aller Art über Kurven, Oberflächen und Körper, welche alle auf einmal durch einen einzigen Beweis bewiesen werden.“ Hatte Apollonios den geometrischen Ort zu drei und vier Geraden diskutiert, so dehnte Pappos die Untersuchung auf n beliebige Geraden aus — eine Fragestellung, die im 17. Jh. mehrere Mathematiker zum Studium herausforderte.

2.5.3 Proklos

Aus der in der Spätzeit vermehrt entstehenden Sammel- und Kommentarliteratur sei noch der ausführliche Kommentar des Proklos Diadochos (410-485) zum ersten Buch der euklidischen Elemente erwähnt. Proklos, nach Studien in Alexandria Haupt der Akademie in Athen, verfaßte auch Kommentare zu einer Reihe von Dialogen des Plato. Seinen Euklid-Kommentar eröffnete er mit einer Darlegung der neuplatonischen Philosophie der Mathematik; wichtig für die Nachwelt wurden vor allen Dingen die vielen wertvollen historischen Bemerkungen, die Proklos darin überlieferte (meist gehen sie auf die verlorenen Werke des Eudemos und Geminios zurück). Proklos setzt sich ausführlich mit den Prinzipien der Geometrie auseinander, diskutiert das Verhältnis von Postulaten, Axiomen und Hypothesen zueinander, erläutert den Unterschied zwischen Lehrsätzen und Problemen, bespricht Beweisstrukturen und Fach-

ausdrücke. Die einzige Stelle, an der er über Euklid hinauszugehen versucht, ist, als er sich bemüht, das Parallelenpostulat zu beweisen, nachdem er einen Beweisversuch des Ptolemaios zurückgewiesen hat. Ob Proklos auch Kommentare zu weiteren Büchern der Elemente verfaßte, wie er beabsichtigte, ist ungewiß.

Drei Themen sind in diesem Abschnitt noch zu besprechen: die Entstehung der Trigonometrie, die Schriften der römischen Feldmesser und die Leistungen der Byzantiner nach der Jahrtausendwende.

2.5.4 Sehnengeometrie

Die Trigonometrie wurde bis hin zu Copernicus (1473–1543) als Bestandteil der Astronomie aufgefaßt und dementsprechend in astronomischen Werken behandelt — das erste selbständige Lehrbuch der Trigonometrie verfaßte Regiomontanus um 1464, doch erschien es erst posthum fast 70 Jahre später (1533). Erste Elemente hatten wir in der vorgriechischen Mathematik kennengelernt. Die Angabe des Rücksprungs zur Kennzeichnung der Neigung einer Fläche (etwa einer Pyramide) enthält ja den Kern einer Tangensfunktion. Dabei ist freilich zu bedenken, daß die Babylonier die beiden erforderlichen Maßangaben (Größe des Rücksprungs bei gegebener Höhendifferenz) in unterschiedlichen Maßeinheiten ausdrückten und sie nicht zu einem gemeinsamen Oberbegriff, wie ihn die Tangensfunktion darstellt, zusammenfaßten. Auch ihr Bemühen, ein Kreissegment durch Sehne und Pfeil zu erfassen, kann man einer frühen Vorstufe der Trigonometrie zurechnen, basierte doch die ebene Trigonometrie vor der Einführung der Sinus- und Tangensfunktion auf dem Kreis und dem Studium der Beziehungen zwischen Kreissehnen. (Aus diesem Grunde ist es auch besser, von Sehnengeometrie zu sprechen und den Begriff ‘Trigonometrie’ zu reservieren für jenen Zweig der Geometrie, in dem rechtwinklige Dreiecke samt ihren Seitenverhältnissen, also die trigonometrischen Funktionen, zur Anwendung kommen).

Bequemer als das Rechnen mit Sehnen ist dasjenige mit Halbsehnen, worauf die uns geläufigen Winkelfunktionen beruhen. Auf diese kommen wir in Abschnitt 3.4.4 bei der Behandlung der indischen Geometrie zurück; denn in Indien wurden sie zuerst eingeführt. In der überlieferten griechischen Literatur kommen sie nicht vor. Mit der Verbreitung der sin-Funktion über Indien hinaus verschwand die etwas umständlichere Sehnenrechnung aus der Mathematik.

Zum besseren Verständnis der Sehnengeometrie ist es jedoch dienlich, sich vorab den Zusammenhang zwischen der Sehne und dem Sinus klarzumachen (Abb. 2.5.2). Zeichnet man im Kreis vom Radius r zum Zentriwinkel α die

Sehne s , so ist die halbe Sehne $\frac{s}{2}$, geteilt durch r , der Sinus von $\frac{\alpha}{2}$. Verwendet man, wie üblich, für die Sehne (lateinisch: chorda, corda) die Abkürzung ‘crd.’, so gilt also: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r = \frac{s}{2r}$. Daraus folgt:

$$s = \text{crd.}\alpha = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2.5.2)$$

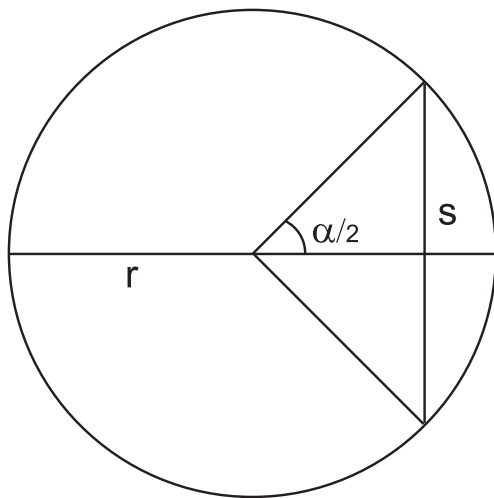


Abb. 2.5.2 Der Zusammenhang zwischen Sehnen- und Sinusgeometrie

2.5.5 Ptolemaios

Man weiß, daß der Astronom Hipparch im 2. vorchr. Jahrhundert eine Sehnentafel berechnete. Überliefert ist die Sehnentafel des Ptolemaios. Sie ist enthalten in seinem astronomischen Hauptwerk „*Matematikē syntaxis*“, in späterer Zeit auch „*Megalē syntaxis*“ genannt (die mathematische bzw. große Sammlung), dem bis zu Copernicus maßgeblichen astronomischen Lehrbuch. Bekannt ist es unter dem arabischen Titel „*Almagest*.“

Klaudios Ptolemaios (ca. 100 – ca. 160), ebenfalls in Alexandria wirkend, schickte dieser Tafel und ihrer Berechnung die Bemerkung voraus, er werde nur die kleinstmögliche Zahl von Lehrsätzen bringen, die dazu erforderlich sei — alles Dinge, die schon vor ihm bekannt waren. Er ging von der Berechnung der Seitenlängen der ersten regulären Polygone im Kreis aus und setzte sich das Ziel, die Sehnenwerte im Abstand von jeweils einem halben Grad anzugeben. Die Länge des Durchmessers setzte er dabei zur Vermeidung von zu

kleinen Sexagesimalbrüchen zu 120 Teilen (*partes* = *p*) an, denn — wie in der Astronomie seit den Babyloniern üblich — rechnete auch Ptolemaios im Sexagesimalsystem. Dieses Vorgehen lieferte ihm mittels elementargeometrischer Überlegungen die Sehnen zu folgenden regelmäßigen *n*-Ecken:

n	3	4	5	6	8	10	12
ϕ	120°	90°	72°	60°	45°	36°	30°

Mit Hilfe seines Sehnensatzes (einem Äquivalent für die Subtraktionsformel der Sinusfunktion; vgl. Aufgabe 2.5.2) konnte er daraus die Sehne von 12° berechnen, woraus er durch wiederholte Halbierung die Sehne von $1\frac{1}{2}^\circ$ gewann. Zum weiteren Vorgehen bemerkte er [Ptolemaios, 32 - 33]:

„Nun kann freilich, wenn z.B. die Sehne zu dem Bogen von $1\frac{1}{2}^\circ$ gegeben ist, die das Drittel desselben Bogens unterspannende Sehne durch geometrische Konstruktion auf keinerlei Weise gefunden werden. Wäre das möglich, dann hätten wir ja ohne weiteres auch die Sehne zum Bogen von $\frac{1}{2}^\circ$ zur Verfügung. Deshalb werden wir zuerst die Sehne zum Bogen von 1° aus den Sehnen zu den Bögen von $1\frac{1}{2}^\circ$ und $\frac{3}{4}^\circ$ auf methodischem Weg ableiten unter Zugrundelegung eines Satzes, der zwar mit absoluter Genauigkeit die Größenbeträge nicht festzustellen vermag, aber bei so minimalen Größen doch wenigstens einen Wert liefern kann, der sich für die sinnliche Wahrnehmung von dem absolut genauen nur ganz unwesentlich unterscheidet.“

Danach zitiert Ptolemaios den besagten Satz wie folgt:

Wenn in einem Kreis zwei ungleiche Sehnen gezogen werden, so ist das Verhältnis der größeren Sehne zur kleineren Sehne kleiner als das Verhältnis des Bogens auf der größeren Sehne zum Bogen auf der kleineren Sehne.

Das bedeutet: weil die Winkeldreiteilung nicht elementar konstruierbar ist, bediente sich Ptolemaios an dieser Stelle der linearen Interpolation, um schließlich die Sehne von 1° zu bekommen. Er fand: *crd.* $1^\circ = 1^p 2' 12''$. In seiner Tafel gab er dann die Längen der Sehnen für Winkel zwischen $\frac{1}{2}^\circ$ und 180° in Schritten von jeweils einem halben Grad an, was einer Sinustafel mit der Winkeldifferenz von $15'$ entspricht (s. Aufgabe 2.5.2).

Ptolemaios hatte, wie der Leser bemerkt haben wird, die Sehne von 12° aus den Sehnen von 72° und 60° gewonnen, also aus den Seiten des regelmäßigen Fünfecks und Sechsecks. Von Interesse ist in diesem Zusammenhang seine Konstruktion der Seite des regelmäßigen Fünfecks (s. Aufg. 2.5.3); denn sie wich von der von Euklid beschriebenen ab.

Um 370 verfaßte Theon von Alexandria einen Kommentar zu den beiden ersten Büchern des Almagest. Dabei wurde er — wie er selbst erwähnt — von seiner gelehrten Tochter Hypatia unterstützt. Auch soll Hypatia einen Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonios (wie auch zur Arithmetica des Diophantos) verfaßt haben; leider sind diese Werke der wegen ihrer Bildung und Eloquenz berühmten Wissenschaftlerin, die am Museion in Alexandria Vorlesungen hielt, nicht überliefert. Als Anhängerin des Neuplatonismus wurde sie 415 vom christlichen Pöbel ermordet.

2.5.6 Menelaos

Neben der ebenen Trigonometrie benötigt der Astronom aber auch die sphärische, stellt sich doch der gestirnte Himmel dem Beobachter in Gestalt einer Kugel dar, so daß die einfachste geometrische Figur das aus Großkreisbögen gebildete sphärische Dreieck ist. Eine erste Sammlung von Lehrsätzen aus diesem Bereich hatte um 100 v. Chr. Theodosios von Pitane angelegt. Die Grundlagen dafür hatte um 100 n. Chr. der in Alexandria wirkende Astronom Menelaos in seiner „Sphärik“ niedergelegt. Dort findet sich erstmals der Begriff und eine Definition des sphärischen Dreiecks. Lehrsätze darüber bringt Menelaos in Analogie zu denjenigen, die Euklid über ebene Dreiecke formuliert hatte. Zentral war dabei seine Regel der sechs Stücke. Sie tritt allerdings bei Menelaos wie auch bei Ptolemaios, der sie ebenfalls beweist, nicht in der Form einer Aussage zum sphärischen Dreieck auf, das von einer Transversalen geschnitten wird, sondern wird bezogen auf zwei Großkreisbögen ADB und AEC (beide kleiner als ein Halbkreis), die von zwei anderen Großkreisbögen DFC und BFE (ebenfalls kleiner als ein Halbkreis) in D, B bzw. C, E geschnitten werden. Das Ergebnis wird in einer dem Ausdruck

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CF}{\sin FD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad (2.5.3)$$

gleichwertigen Form angegeben. Heute würden wir das eher auf ein sphärisches Dreieck ADC (mit einer verlängerten Seite ADB) beziehen, das von dem Großkreis BEF in B, E, F geschnitten wird, und die Behauptung in der Form ausdrücken, daß das Produkt der drei Sinus gleich dem Produkt der drei anderen Sinus ist (abgesehen vom Vorzeichen):

$$\sin AE \cdot \sin CF \cdot \sin DB = \sin EC \cdot \sin FD \cdot \sin BA. \quad (2.5.4)$$

Ähnlich wie beim Sehnensatz des Ptolemaios folgen aus der Regel der sechs Stücke (deren Anwendung ja die Kenntnis von fünf Größen voraussetzt, will

man die sechste berechnen) einfachere Regeln, falls einer oder gar mehrere der Großkreisbögen sich über 90° erstrecken. Doch sei es dem Leser überlassen, derartige Spezialfälle zu betrachten.

2.5.7 Sonnenuhr, Analemma

Die Anregung zur Verknüpfung von Bewegungen auf sphärischen Bahnen und ebenen Kurven muß sich in der Astronomie schon früh ergeben haben — sobald man nämlich die einfachste Art der Sonnenuhr, den Gnomon, genauer zu beobachten begann. Die Ägypter verwendeten ihn in Form des Obelisken. Wie schon erwähnt, soll Anaximandros dieses Instrument, das er angeblich in Babylon kennengelernt hatte, in der ersten Hälfte des 6. Jhs. v. Chr. in Griechenland eingeführt haben. Markiert man die Tageswanderung des Schattens der Spitze des senkrechten Stabes auf der (ebenen) Grundfläche, so erhält man ja das Bild des Tageskreisbogens des Sonnenlaufs; macht man das in regelmäßigen wöchentlichen oder monatlichen Abständen, spiegeln diese Linien auch die Veränderungen im Jahreslauf. So kann man mit diesem Schattenzeiger auch den Zeitpunkt der Sonnenwenden, die Schiefe der Ekliptik und die geographische Breite des Beobachtungsortes bestimmen. Daher wurde der Gnomon zu einem für Astronomen wie Geographen unentbehrlichen Instrument, und die Beschäftigung mit seiner Theorie (d.h. mit Anfängen der Theorie geometrischer Abbildungen) war unabdingbar.

Plinius beschreibt in seiner *Naturalis Historia* (36, 72 f.) ausführlich die größte antike Anlage, das Solarium des Augustus auf dem Marsfeld in Rom mit seinem 30 m hohen Obelisken. Das Analemma, das ebene Zifferblatt, erstreckte sich über ein Feld von etwa 65 m mal 175 m. Wie Ausgrabungen von Teilen desselben vor einigen Jahren ergaben, enthielt es Stundenlinien, Meridian (Mittagslinie mit Tagesmarken) und Monatslinien sowie eingemeißelte Tierkreisnamen und Angaben zur Jahreszeit ([Buchner 1982]; vgl. Abb. 2.5.3).

Das geometrisch-mechanische Verfahren der Erzeugung des Liniennetzes auf verschieden geneigten Auffangflächen von Sonnenuhren unter Berücksichtigung der geographischen Breite wurde wahrscheinlich von Eudoxos von Knidos entwickelt. Ptolemaios widmete dem Problem eine eigene (nur in lateinischer Übersetzung erhaltene) Schrift „Analemma“. Lediglich arabisch überliefert ist seine Abhandlung „Planisphaerium“. Sie wurde nach Revision durch al-Majriti 1143 von Hermann von Kärnten ins Lateinische übertragen und beschreibt die Abbildung von Himmelskreisen auf eine Ebene. Ptolemaios wählte als Projektionszentrum den Südpol der Himmelskugel und legte die Ebene durch den Äquator. Diese Abbildung, die stereographische Projektion, liegt dem beliebtesten astronomischen Instrument des Mittelalters, dem (ebenen) Astrolabium

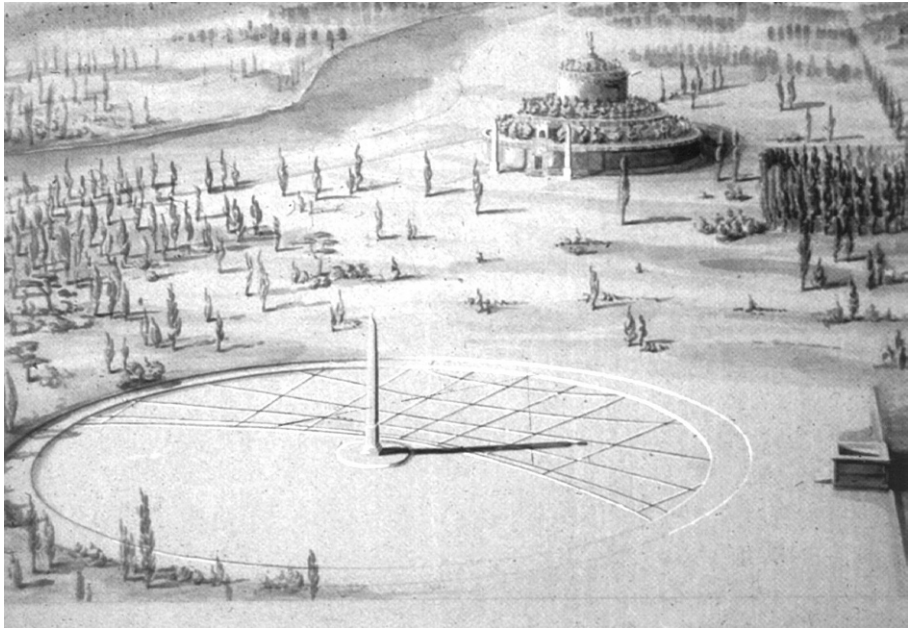


Abb. 2.5.3 Solarium und Mausoleum des Augustus auf dem Marsfeld in Rom (Rekonstruktion) [E. Buchner, in: Archäologische Entdeckungen. Die Forschungen des Deutschen Archäologischen Instituts im 20. Jh., Bd.II S. 180 Abb. 202 Mainz: Philipp von Zabern 1999]

zugrunde. Da sie Kreise in Kreise (bzw. die Meridiane in Geraden) abbildet, ist sie für astronomische Zwecke besonders geeignet.

2.5.8 Kartographie

Auf Abbildungsprobleme stießen auch die Geographen, sobald sie versuchten, größere Bezirke oder gar die ganze Oikumene — den ihnen bekannten Ausschnitt der bewohnten Erde — darzustellen. Dem schon genannten Eratosthenes verdankt man die Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, gebildet aus Parallelkreisen und Meridianen, die durch feste Punkte (Städte, deren Koordinaten man bestimmt hatte) hindurchgehen. Als Mittelparallele wählte er einen durch die Säulen des Herakles (Gibraltar) gehenden Breitenkreis. Wurden auch manche Details dieses Entwurfs vom Astronomen Hipparch kritisiert (der für die schwierige Längenbestimmung die Beobachtung von Mondfinsternissen vorschlug), so ist doch das von Eratosthenes angewandte Verfahren der Zuordnung von Punkten auf der Kugel zu ihren Bildpunkten in der Kartenebene geometrisch klar bestimmt. Der Geograph Strabon (64/63

v. Chr. – 20 n. Chr.) verwendete es in seiner, überwiegend länderkundlich-historisch orientierten *Geographia* als Grundlage eines Entwurfs einer Weltkarte im rechtwinkligen Koordinatensystem.

Ausführlich setzte sich Klaudios Ptolemaios, dessen „*Geographike hyphegesis*“ für die geographische Wissenschaft eine ähnlich bedeutsame Rolle spielte wie sein „*Almagest*“ für die Astronomie — nämlich die Zusammenfassung und Übermittlung des geographischen Wissens zu seiner Zeit —, mit der Theorie der Projektion auseinander. Er kritisierte die Verwendung der Zylinderprojektion, wie sie sein Vorgänger Marinus von Tyros (Anfang 2. Jh. n. Chr.) im Anschluß an Eratosthenes benutzt hatte, wegen der starken Verzerrungen zu den Polen hin, und propagierte stattdessen zwei Varianten der in dieser Hinsicht wesentlich günstigeren Kegelprojektion. Sein großer Katalog enthält, geordnet nach Erdteilen und Ländern, für 8.100 Orte die Längen- und Breitenkoordinaten und bietet somit die Möglichkeit, die entsprechenden Stellen in einem beliebig konstruierten Koordinatensystem zu markieren. Ob er selbst eine Karte nach diesen Angaben konstruierte, ist unbekannt.

Marinus hatte die Oikumene auf eine ebene Karte abzubilden versucht, indem er die Erdoberfläche auf einen die Erdkugel am Äquator berührenden Zylinder projizierte, wodurch er ein rechtwinkliges Koordinatensystem erzeugte. Die Idee des Ptolemaios war, der Erde sozusagen eine Kegelhaube aufzusetzen, die den Globus in einem Breitenkreis berührt, der etwa in der Mitte der damals bekannten bewohnten Zone liegt (Ptolemaios wählte den durch Rhodos verlaufenden Kreis von 54°). Denn dann wird der diesen Kreis enthaltende Streifen der Erdoberfläche bei der Abbildung kaum verzerrt. Die Meridiane bleiben auch bei dieser Projektion Geraden, die Breitenkreise werden in Kreisbögen abgebildet. Nur die nördlichen und südlichen Randgebiete werden merklich in Nord-Südrichtung gestreckt (Abb. 2.5.4). Um auch diesen Mangel auszugleichen, fügte Ptolemaios dem auf die Nordhalbkugel aufgesetzten Kegel von Süden her einen Gegenkegel an; das führt im Kartenbild zu einer Abknickung am Äquator (vgl. Abb. 5.2.2).

Damit noch nicht zufrieden, entwickelte Ptolemaios eine modifizierte, mathematisch anspruchsvollere Kegelprojektion. Wiederum werden dabei die Breitenkreise als Kreisbögen dargestellt. Diesmal sollen die beiden Breitenkreise durch Thule (27°) und Syene ($66^\circ 17'$) sowie ein dritter, der durch einen Ort geht, der in gleicher Entfernung wie Meroë spiegelbildlich südlich des Äquators mit $106^\circ 42'$ Polabstand gelegen ist, streckengetreu abgebildet werden. Damit sind für jeden Längenskreis drei Punkte vorgegeben; diese werden durch den so bestimmten Kreisbogen miteinander verbunden. — Wollte man nicht nur drei, sondern alle Breitenkreise längentreu abbilden, würden die Längenskreise

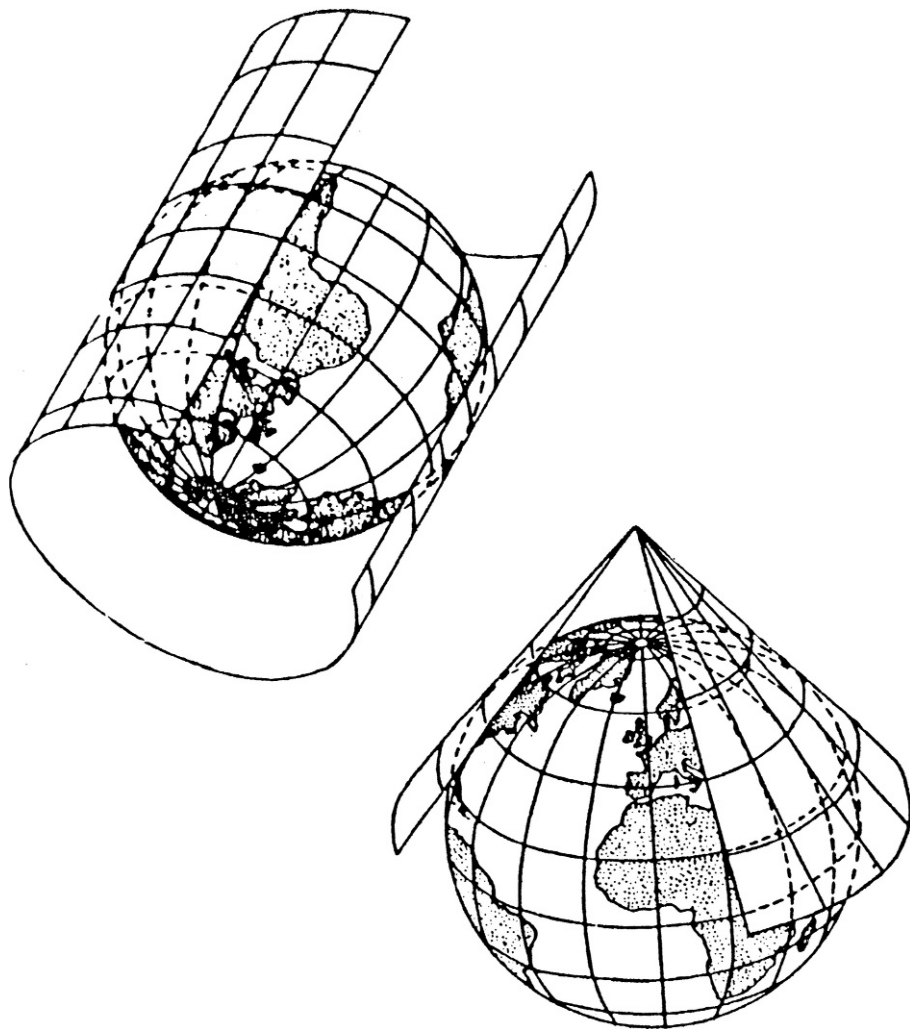


Abb. 2.5.4 Prinzip der Zylinderprojektion des Marinus
und Kegelprojektion des Ptolemaios

in transzendente Kurven überführt. Ptolemaios wählte also eine Annäherung, die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt (vgl. Abb. 5.2.4; die stereographische Projektion wurde von Ptolemaios zur Herstellung von Erdkarten nicht in Betracht gezogen.)

Historische Karten aus der Zeit der Renaissance, bei der die Kegelprojektionen des Ptolemaios verwendet wurden, sind in Abschnitt 5.2 abgebildet. (Die Entwicklung der Kartographie seit der Renaissance ist in geometrischer Hinsicht dadurch bestimmt, daß der Kartograph drei Forderungen zu erfüllen bestrebt ist: Längentreue, Winkeltreue und Flächentreue. Deren Unvereinbarkeit läßt sich mathematisch mit Hilfe der im 18. Jh. entwickelten Differentialgeometrie aufzeigen. Die Fülle der inzwischen bei der Kartenherstellung verwendeten Projektionen ist daher u.a. eine Folge der Entscheidung, auf welche dieser Eigenschaften am ehesten zugunsten anderer verzichtet werden kann. Vgl. auch Abschnitt 5.2.)

2.5.9 Agrimensoren

Es ist wohl eine allgemein verbreitete Ansicht, daß sich die mathematische Theorie aus der Praxis heraus entwickelte — auch in der bisherigen Darstellung wurde wiederholt darauf hingewiesen, die Griechen hätten in vielem aus den vorgriechischen Kulturen Erkenntnisse und praktische Regeln übernommen und diese dann systematisiert, begründet und zu einem Theoriegebäude verknüpft. Dabei wird aber oft übersehen, daß es nicht nur den Weg von der Praxis zur Theorie, von den Rezepten und Regeln zum wissenschaftlichen Lehrbuch gibt. Auch in umgekehrter Richtung wirkt die Beeinflussung; das hat die mathematikhistorische Forschung nicht immer ausreichend wahrgenommen. Bruchstücke aus mathematischen Theorien können den Weg zurück in die Praxis finden. Je nachdem, in wessen Hände sie dabei gelangen, ist sich der Anwender des inneren Zusammenhanges und des Gültigkeitsbereichs einer Aussage bewußt, oder die Kenntnis der Struktur und des logischen Aufbaus, die die Theorie auszeichneten, geht wieder verloren. Dann kann es vorkommen, daß die übernommenen Elemente nur halb verstanden und in einer Weise eingesetzt werden, die den Bedürfnissen der Praxis nicht unbedingt in optimaler Weise gerecht wird.

Ein Beispiel für einen solchen Transfer liefern die römischen Feldmesser oder Agrimensoren. (Ein anderes kann man in den mittelalterlichen Bauhütten und ihrer noch bis zu Albrecht Dürer nachwirkenden Tradition sehen; vgl. Kap. 4). Wenn Cicero (in „De Divinatione“ I, 17) berichtet, Romulus habe Rom nach den Regeln der Feldmeßkunst gegründet (was bekanntlich im Jahr 753 v. Chr. geschehen sein soll), so belegt diese Feststellung wohl eher die hohe

Wertschätzung dieses Berufs zur Zeit Ciceros (106–43), als daß sie eine historische Tatsache beschreibt. Denn im römischen Reich wurden Vermessungsaufgaben wohl ursprünglich von verschiedenen „Berufen“ ausgeführt: für die Festlegung von Tempelbezirken waren Priester zuständig, für die Vorbereitung von Truppenlagern das Militär, für den Bau von Wasserleitungen Architekten. Für die erste, von Caesar angeordnete Reichsvermessung (durchgeführt 37–20 v. Chr.) zog man offenbar noch griechische Fachleute hinzu. Die Landverteilung nach Eroberungen machte in Rom, das sich, wie bekannt, um den Ausbau des Rechtssystems große Verdienste erwarb, eine Agrargesetzgebung notwendig, als deren Folge „Rechtspfleger“ benötigt wurden, denen die Übertragung in die Wirklichkeit oblag. Auch bei der Neugründung von Städten in den Kolonien waren solche Fachleute erforderlich.

Bis gegen Ende des 1. Jhs. n. Chr. hatte sich dann der Stand der Agrimensoren herausgebildet. Er entwickelte um diese Zeit auch seine eigene Literatur, die gromatichen Schriften (benannt nach einem einfachen Meßgerät, der Groma oder Stella, das von Heron zu einem Präzisionsinstrument, der Dioptra, weiterentwickelt wurde; s. Abb. 2.5.5). Die Fachliteratur der Feldmesser wurde im 3. Jh. zum sog. „Corpus gromaticorum“ zusammengefaßt.

Wie die Agrimensoren ihrem Beruf nachgingen, schilderte anschaulich Cassiodorus (480?–575?), nachdem er bemerkt hatte, andere Wissenschaften seien so theoretisch, daß die Professoren nur eine Handvoll von Studenten haben:

„Aber der Feldmesser ist mit der Beilegung einer Grenzstreitigkeit betraut, die entstanden ist, damit mutwilliger Streitsucht ein Ende gesetzt werde. Er ist ein Richter eigener Art; sein Gerichtshof sind die verlassenen Felder; man könnte ihn für verrückt halten, sieht man ihn gewundene Pfade entlanglaufen. Wenn er nach Beweismaterial sucht im wilden Gehölz oder im Dickicht, läuft er nicht wie du und ich, er sucht sich seinen eigenen Weg. er erklärt seine Feststellungen, er wendet seine Kenntnisse an, er entscheidet Streitigkeiten durch seine Fußstapfen, und wie ein gigantischer Strom nimmt er dem einen Stücke des Landes weg und gibt sie dem anderen.“ [Dilke 1971, S. 45/46 (engl.)]

Unser heutiges Wissen über die geometrischen Kenntnisse der römischen Feldmesser stammt vor allem aus Sammelhandschriften, die sich jetzt im Besitz der Herzog August Bibliothek in Wolfenbüttel befinden. Es handelt sich um die beiden Codices Arcerianus A und B (benannt nach Johannes Arcerius, dem sie von 1566 bis 1604 gehörten) und um den Codex Gudianus (nach dem Handschriftensammler Marquard Gude, 1635–1689). Der Arcerianus wurde im 5.-6. Jh. geschrieben und ist damit die älteste (vollständig erhaltene) antike mathematische Handschrift. Der Gudianus stammt aus dem 9. Jh. In beiden Fällen haben wir es also mit Abschriften von Texten zu tun, die die Tätigkeit

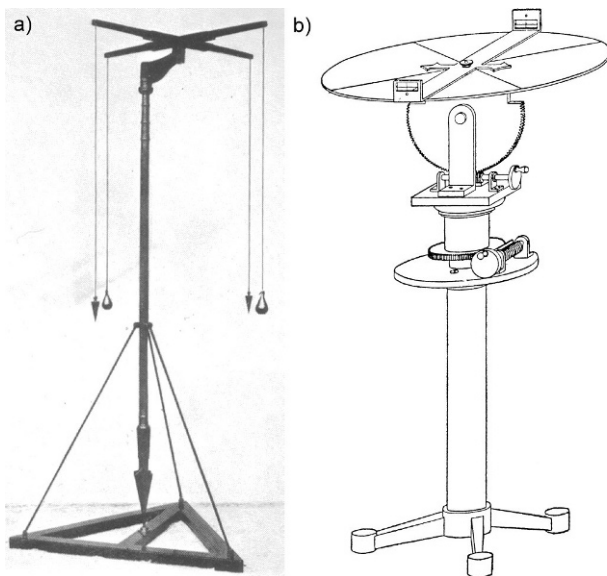


Abb. 2.5.5 Rekonstruktion a) der Groma zur Festlegung rechter Winkel
und b) der Dioptra des Heron

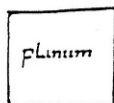
[O.A.W. Dilke: *The Roman Land Surveyors*. Newton Abbot, David & Charles 1971; S. 50, 75]

der Feldmesser oder Agrimensoren betreffen. Zu den Autoren, durch welche Einzelheiten aus dem Vermessungswesen der Römer bekannt sind, gehören Vitruvius (um Chr. Geburt), der ehemalige Offizier Columella, der um 65 n. Chr. zwölf Bücher über das Landleben verfaßte, der Architekt und Aufseher des Wasserwesens in Rom, Frontinus († um 100 n. Chr.) und die Feldmesser Hyginus und Balbus.

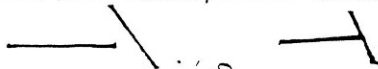
Zu den Aufgaben der Agrimensoren gehörte neben der Landvermessung auch die Rechtsprechung, soweit sie Grundstücksstreitigkeiten betraf. (Ein Beispiel findet sich im Anhang A.3). Demzufolge sind die Feldmesserschriften auch nicht einfach Handbücher der praktischen Geometrie, sondern zugleich juristische Leitfäden. So enthalten sie u.a. eine ausdifferenzierte Fachterminologie zur Bezeichnung der verschiedenen Feldertypen und ihrer Begrenzungen, die weit über die sonst in der Geometrie üblichen Ausdrücke für ebene Figuren hinausgeht. Während z.B. Euklid definiert: „Eine Grenze ist das, worin etwas endet,“ schreibt der Vermessungsbeamte Balbus: „Grenze ist das, bis wohin das Eigentumsrecht reicht.“

Die Grundelemente der Geometrie wurden aber oft in Anlehnung an die von Euklid gegebenen oder auch bei Heron zu findenden Definitionen eingeführt.

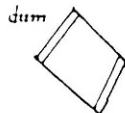
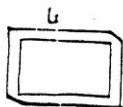
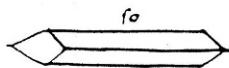
mille pedes $\bar{z}$ fadios $\bar{z}$ mensurancuntur generibus tribus
 longitudinem et latitudinem et crassitudinem hoc est rectū planū solidū



Rectum est cuius longitudinem sine latitudine metimur. ut lineas
 positae fadiis miliaria fluminum latitudines et his similia.



Planum est quod greci ^{epipedon} appellant. nos constat $\bar{z}$ pedes in quo
 longitudinem et latitudinem habemus $\bar{z}$ quae etiam agros aedifi-
 ciorum solae quibus alacudo aut crassitudo $\bar{z}$ pponitur. ut opera
 rectoria in iumentis $\bar{z}$ bulbis et his similia.



Solidum est quod greci ^{stereon} appellant. nos quidem $\bar{z}$ pedes appella-
 mus. cuius longitudinem et latitudinem et crassitudinem metimur.
 ut parietum structuras pilorum pyramidum aut lapidum maceriarum
 et his similia.

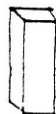


Abb. 2.5.6 Agrimensoren-Handschrift
 [Cod. Guelf. 105 Gud. Lat. 2°, fol. 77: geometrische Definitionen,
 Herzog August Bibliothek Wolfenbüttel]

Einige Beispiele aus der Wolfenbütteler Handschrift Cod. Guelf. 105 Gud. Lat., (vgl. Abb. 2.5.6):

Rectum est cuius longitudinem sine latitudine metimur.

(Eine Gerade ist, was wir als Länge ohne Breite messen.)

EUKLID hatte nach der bekannten ersten Definition

Punctum est, cuius pars nulla est

(Ein Punkt ist, was keinen Teil hat.)

als zweite angegeben:

Linea autem sine latitudine longitudo.

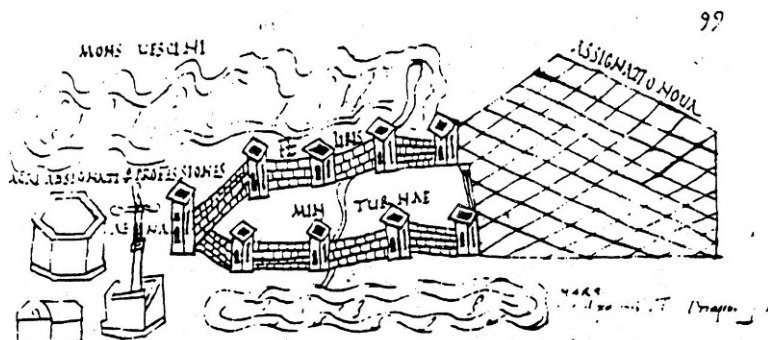
(Eine Linie aber [ist] eine Länge ohne Breite.)

Der Feldmesser nimmt also ausdrücklich die praktische Tätigkeit des Messens mit in die Definition auf, die für den Theoretiker Euklid nur störend wäre. Analog wird bei der Definition der Fläche (*planum*) und des Körpers (*solidum*) — man beachte die Zeichnung — vorgegangen. Auf der folgenden Seite werden dann drei Arten von Linien eingeführt: die gerade, die kreisförmige und die „flexuose“, also die beliebig gebogene. Mit deren Hilfe können die verschiedenartigsten Figuren benannt und später berechnet werden.

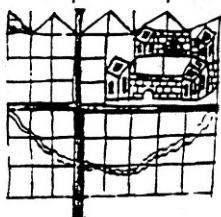
Die von den Agrimensoren verwendeten Näherungsformeln lassen sich teilweise bis in die vorgriechischen Kulturen zurückverfolgen. Das gilt sowohl für Meß- wie für Rechenverfahren. Gelegentlich sind auch Verbesserungen zu beobachten, so, wenn die Fläche eines Kreissegmentes mit der Sehne s und dem Pfeil p (vgl. Formel 1.2.11) nach der Vorschrift

$$F = \frac{s+p}{2} \cdot p + \left(\frac{s}{2}\right)^2 / 14 \quad (2.5.5)$$

berechnet wird. Der erste Teil, der die Ersetzung des Segments durch ein Trapez erkennen läßt, findet sich auch in einem ägyptischen Papyrus (3. Jh. v. Chr. oder früher); das Korrekturglied steht in einem umfangreichen Werk von Columella über die Landwirtschaft (64 n. Chr.), das dem Landwirt auch Grundkenntnisse im Vermessungswesen vermitteln will. Heron diskutiert die Korrektur ausdrücklich. Der Nenner 14 läßt die Verwendung des archimedischen Wertes $\frac{22}{7}$ für π erkennen und zeigt damit, wie ein durch theoretische Überlegungen gewonnener Wert in die Praxis eindringt, ohne daß in der Regel der Praktiker die Begründung der Vorschrift einzusehen vermag (vgl. Aufgabe 2.5.4).



(N) ulas ergo generibus limitum confutationes inchoate sunt; quibusdam coloniis: h. d. n. et d. n. non longe a ciuitate oritur. Nam et in proximo esse debet, immo si fieri potest ex ipsa colonia inchoari sed qm utiusa municipia in uiscolue transferuntur, sanctis iam muris et ceteris moenibus limites primos nisi a foris accipere non possunt.



(N) ut agri facilitatem secuta, et ubi plurimum erant assignaturi, ibi d. n. et d. n. confatu erunt. Antiqui enim propter subita bellorum pericula non soluerant contenta urbes muniungere, uerū etiam loci aspera et excelsa deligebant, ubi illis amplissimum propugnaculum eēt ipsa locantur. haec uicina urbibus rupium multitudo limites accipere propter loci difficultatem non potuit. Sed relicta

Abb. 2.5.7 Agrimensoren-Handschrift

[Cod. Guelf. 105 Gud. Lat. 2°, fol. 99: Anlage rechteckiger Felder, Herzog August Bibliothek Wolfenbüttel]

Zum Abschluß der Behandlung der Agrimensoren sei zur Veranschaulichung noch eine weitere Seite aus dem Gudianus abgebildet (Abb. 2.5.7). Sie illustriert, wie vor den Mauern einer Stadt in der zwischen Meer und Gebirge liegenden Ebene rechteckige Felder angelegt werden sollen.

Aus dem Bereich der römischen Kultur sind noch einige Gelehrte aus dem 5./6. Jh. zu besprechen (Martianus Capella, Boethius und Cassiodor). Die mathematischen Teile ihrer Schriften bildeten, neben elementaren Teilen von Euklids Elementen, eine wesentliche Grundlage für die im Mittelalter erfolgte Vermittlung geometrischer Kenntnisse im Rahmen des Quadriviums (der vier mathematischen Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Harmonik oder Musik). Sie werden daher in Kap. 4 vorgestellt.

2.5.10 Byzanz

Die Mathematikerschule in Alexandria fiel schließlich der Heidenverfolgung zum Opfer, bei der — wie erwähnt — 415 Hypatia ihr Leben verlor, die Akademie in Athen wurde 529 durch den Kaiser Justinian I. (er regierte von 527 bis 565) geschlossen. In Konstantinopel (seit dem Tod des Kaisers Theodosius 395 unabhängig von Rom) war es den Gelehrten noch etwas länger möglich, zu arbeiten und ihre sammelnde und kommentierende Tätigkeit fortzusetzen. Hier wirkten die Erbauer der Hagia Sophia, Anthemios von Tralles († 534) und Isidor von Milet, der nach Anthemios' Tod die Bauleitung übernahm. Ersterer schrieb eine Abhandlung über Brennspiegel. Darin bewies er, daß parallel einfallende Strahlen von einem parabolischen Spiegel im Brennpunkt gesammelt werden. Auch suchte er darin nach einer Anordnung, die einen von der Sonne ausgehenden Lichtstrahl, der durch ein kleines Loch in einen abgedunkelten Raum eintritt, so reflektiert, daß er unabhängig von der Tages- oder Jahreszeit durch einen bestimmten Punkt geht. Es gelang Anthemios, eine punktweise Konstruktion für die Gestalt der Spiegelfläche — ein Ellipsoid — anzugeben. Aus deren Eigenschaften bezüglich einer festen Ebene (konstante Abstandssumme von zwei festen Punkten) folgte er die Möglichkeit der Fadenkonstruktion der Ellipse (s. Aufg. 2.5.5).

Dem mit Anthemios befreundeten Eutokios aus Askalon (* um 480) verdankt man eine Anzahl wertvoller Kommentare zu Schriften des Archimedes und Apollonios, worin er u.a. über Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung berichtet, die anders nicht überliefert sind. Die ersten vier Bücher der Kegelschnitte des Apollonios sind nur deshalb in der Originalsprache erhalten, weil Eutokios dazu einen Kommentar verfaßte. Doch in der Zeit der Bilderstürme (726–843) erlebte auch dieses letzte Zentrum, das die griechische Mathematik zu bewahren versucht hatte, einen deutlichen Niedergang.

Rektor der 863 durch Bardas neubegründeten Universität in Konstantinopel wurde der Philosoph Leon von Byzanz, nachdem er ein Angebot, an den Kalifenhof in Bagdad zu kommen, ausgeschlagen hatte. Er hielt seine Schüler zum Abschreiben klassischer philosophischer wie mathematischer Schriften an. Eine damals entstandene Euklid-Handschrift wird heute in Oxford aufbewahrt, eine Archimedes-Abschrift gelangte später über den Hof der unteritalienischen Normannen in den Besitz der Päpste und wurde im 16. Jh. intensiv studiert, bevor sie verloren ging. Auch die schönste der erhaltenen Ptolemaios-Handschriften wurde damals in Byzanz kopiert.

Im 10. bis 14. Jh. bildete sich allmählich in Konstantinopel wieder eine dünne Oberschicht heraus, die an philosophischen und mathematischen Studien interessiert war und sich bewußt der griechischen Sprache bediente. Erneut waren in dieser Phase der byzantinischen Mathematik die Wissenschaftler bestrebt, das griechische Erbe sammelnd zu bewahren und weiterzuführen. Es machen sich in diesem Zeitraum allerdings auch neue Einflüsse bemerkbar: solche des lateinischen Mittelalters, solche aus dem Bereich der arabischen Kultur und Wissenschaft und die Berührung mit dem indischen Ziffernrechnen und anderen indischen Methoden.

Um 1050 wird Michael Psellos Leiter der erneuerten Universität, an der man sich mit der Philosophie und Wissenschaft von Platon und Aristoteles — nicht zuletzt mit dessen logischen Schriften — kritisch kommentierend auseinandersetzt. Psellos schloß sich Platon und Proklos in der Auffassung an, die Mathematik sei das Bindeglied zwischen der Welt der Ideen und den körperlichen Dingen und zugleich ein Mittel, die Schüler zum abstrakten Denken zu erziehen. In seine Lebenszeit fiel die endgültige Spaltung (1054) der Kirche in die west- und die oströmische. Anderthalb Jahrhunderte später, während des 4. Kreuzzuges (1202–1204), kam dann Byzanz unter weströmische Herrschaft und wurde bis 1261 vom lateinischen Kaisertum regiert.

Im 12. Jh. machten die Byzantiner die erste Bekanntschaft mit den indischen Zahlen, wie Randnoten in einer Euklid-Handschrift belegen. Erstmals wird das indische Rechnen in einer anonymen Schrift von 1252 erläutert; eine spätere Darstellung verfaßte Maximos Planudes (1255?–1310). Er lebte bereits unter der 1261 beginnenden, rund 200 Jahre dauernden Herrschaft der Dynastie der Paläologen, unter der die eigentliche humanistische Blütezeit der byzantinischen Mathematik zu verzeichnen ist. Nikolaos Rhabdas († 1350) gab im Jahr 1340 diese Abhandlung heraus, zugleich verfaßte er eine Schilderung des Fingerrechnens.

Auf geometrischem Gebiet arbeitete Theodoros Metochites (1260?–1332) u.a. über die Elemente des Euklid, über Apollonios und Ptolemaios. Zur gleichen



Abb. 2.5.8 Mausoleum der Galla Placidia in Ravenna. Byzantinische Mosaiken mit Sternen und geometrischen Ornamenten schmückten die Gewölbe des Grabmals, erbaut im 5. Jh. für die Tochter von Theodosius I., dem Großen, der als letzter Alleinherrscher das römische Weltreich regierte. [Foto Alten]

Zeit schrieb Johannes Pediasimos eine praktische Geometrie im Stil Herons von Alexandria. Der zweisprachige Basilianermönch Bernhard Barlaam (1290?–1348?) aus Kalabrien, der 1339 als byzantinischer Gesandter mit Papst Benedikt XII. über eine Wiedervereinigung der ost- mit der weströmischen Kirche verhandelte, interpretierte das 2. Buch der Elemente Euklids arithmetisch-algebraisch. Isaak Argyros (1310?–1371) schrieb Scholien zum 1. bis 6. Buch der Elemente. Den Niedergang vor Augen, nachdem sich die Unionsverhandlungen mit den Päpsten zerschlagen hatten und die Türkengefahr wuchs, emigrierten viele Gelehrte nach Italien und gaben dort ihr Wissen an die aufblühende Wissenschaft der Renaissance weiter (vgl. Kap. 5).

Zum Abschluß muß betont werden, daß die Erforschung der byzantinischen Mathematik keineswegs abgeschlossen ist, da viele Handschriften bisher nicht ediert und ausgewertet wurden. Die Zusammenarbeit von Mathematikhistorikern und Byzantinisten, wie sie zum Beispiel Kurt Vogel und Herbert Hunger um 1960 vorbildlich verwirklichten, ist dabei unumgänglich. Eine Intensivierung dieser Erforschung wäre aufgrund der Stellung der byzantinischen Mathematik im Schnittpunkt der gegenseitigen Beeinflussung von Ost und West dringend zu wünschen.

Die klassischen Probleme in der griechischen Mathematik

≈ 585	Thales	Durchmesser halbiert Kreis; rechtwinkliges Dreieck in Halbkreis
≈ 550	Pythagoras ?, Pythagoreer	regelmäßiges Fünfeck im Kreis
≈ 450	Hippasos	Zwölfflächner (Dodekaeder); Entdeckung des Irrationalen
≈ 440	Hippokrates	Quadratur der Kreismöndchen; Einschiebung von zwei mittleren Proportionalen x, y ($\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ zur Lösung des delischen Problems
≈ 434	Anaxagoras	Kreisquadratur versucht (wie?)
≈ 430	Antiphon	Kreisquadratur mittels einbeschriebener $3 \cdot 2^n$ -Ecke oder $4 \cdot 2^n$ -Ecke
≈ 420	Hippias	Winkelteilung mittels $\frac{y}{a} = \frac{\phi}{\pi/2}$
≈ 410	Bryson	Kreisquadratur mittels ein- und umbeschriebener Vielecke; Zwischenwertsatz
≈ 390	Archytas	Einschiebung zweier geometrischer Mittel, stereometrisch gelöst
≈ 380	Theaitetos	Fünf platonische Körper mit umbeschriebenen Kugeln
≈ 370	Eudoxos	Irrationalitätentheorie; 'platonische' bewegungsgeometrische Einschiebung von zwei geometrischen Mitteln ?
≈ 350	Brüder Deinostratos u. Menachmos	Kreisquadratur mittels der Kurve von Hippias ('Quadratrix'); Parabel und Hyperbel für zwei geometrische Mittel
≈ 330	Euklid	„Elemente“: mit Zirkel und Lineal ausführbare Konstruktionen
287–212	Archimedes	Kreisquadratur, Kugelvolumen; Siebeneckkonstruktion (nur arabisch erhalten); Winkeldreiteilung (Papierstreifenkonstruktion)
≈ 240	Eratosthenes	Mechanische Lösung für das Einschieben von zwei mittleren Proportionalen
≈ 210	Apollonios	Kegelschnitttheorie; zwei geometrische Mittel; platonische Körper
≈ 180	Diokles	Kissoide
≈ 180	Nikomedes	Konchoide (Muschellinie)
≈ 75	Heron	Neusiskonstruktion für zwei geometrische Mittel
85?–165?	Ptolemaios	Sehnentafel (Winkeldreiteilung)
≈ 320	Pappos	Sammelwerk „Collectiones“ mit historischen Berichten
≈ 370	Theon	Euklid-Bearbeitung
≈ 460	Proklos	Kommentar zum 1. Buch der Elemente Euklids
≈ 520	Simplikios	Auszüge aus Eudemos (um 320 v. Chr.): Bericht über Möndchenquadratur des Hippokrates
≈ 520	Eutokios	Kommentar zu Archimedes' „Über Kugel und Zylinder“: Bericht über die Geschichte des delischen Problems

2.6 Aufgaben zu 2

Aufgabe 2.1.1: Entfernungsmessung nach Thales

Da die Entfernung des Schiffes auf See nicht direkt meßbar ist, soll Thales es einmal von der Spitze eines Turmes und einmal vom Fuß des Turmes aus angepeilt haben. Der Turm stellt eine Seite eines Dreiecks dar, die beiden Sichtlinien bilden die beiden anderen Seiten.

- a) Inwiefern ist zur Begründung dieses Verfahrens der zitierte geometrische Satz erforderlich?
- b) Welche Formel folgt daraus für die Berechnung der Entfernung des Schiffes?

Aufgabe 2.1.2: Varianten der Entfernungsmessung nach Thales

Wie könnte Thales die Entfernung eines Schiffes auf See bestimmt haben, wenn kein genügend hoher Turm am Ufer zur Verfügung stand? (Unter der Voraussetzung, daß er die ihm zugewiesenen Sätze alle kannte, sind zwei verschiedene Verfahren möglich.)

Aufgabe 2.1.3: Der Goldene Schnitt am Pentagon

Bekanntlich stehen beim regelmäßigen Fünfeck Diagonale und Seite im Verhältnis des Goldenen Schnittes zueinander (vgl. Abb. 2.1.5). Man leite die zwischen d_0 und s_0 bestehende quadratische Gleichung her und als deren Lösung dieses Verhältnis. Wodurch kommt seine Irrationalität zum Ausdruck?

Aufgabe 2.2.1: Die Lösung des delischen Problems mittels Kegelschnitten

- a) Man zeige, wieso der Ansatz von Hippokrates auf die Lösung der Würfelverdoppelung führt.
- b) Man skizziere die drei darin enthaltenen Kegelschnitte in einem (x, y) -Koordinatensystem und bestimme die Größen x und y .

Aufgabe 2.2.2: Die Quadratrix des Hippias

- a) Man zeichne die Quadratrix durch Konstruktion einiger Punkte gemäß der bewegungsgeometrischen Vorschrift (z.B. unter Heranziehung eines Winkelmessers oder durch fortgesetzte Halbierung der Strecken und Winkel).
- b) Man schreibe ihre Polargleichung in der Form $\rho = f(\phi)$.
- c) Der Endpunkt der Quadratrix im ersten Quadranten ist unbestimmt, da in dieser Lage die sich abwärts bewegende und die sich drehende Seite zusammenfallen. Man bestimme durch Grenzübergang den Abstand ρ vom Ursprung, d.h. die x -Koordinate dieses Punktes (die y -Koordinate ist dann gleich 0).
- d) Inwiefern ist durch seine Position eine Möglichkeit gegeben, die Kreisquadratur zu bewältigen?
- e) An welchen Stellen werden die Beschränkungen elementargeometrischer Konstruktionen überschritten?

Aufgabe 2.2.3: Papierstreifenkonstruktion zur Winkeldreiteilung nach Pappos

- a) Man zeichne die der Papierstreifenkonstruktion zugrundeliegende Figur, wie im Text beschrieben.
- b) Zum Beweis der Richtigkeit trage man noch die Hilfslinie FB ein und fälle das Lot von F auf BE , dessen Fußpunkt G genannt sei.
Warum ist jetzt BF ebenfalls gleich $OB = DF = FE$? Bezeichnet man den kleineren der beiden abgeteilten Winkel $\sphericalangle AOD$ mit β , so gilt $\sphericalangle OFB = 2\beta$ (warum?). Aber auch $\sphericalangle BOE = 2\beta$ (warum?). Folglich ist $\alpha = 3\beta$, wie zu beweisen war.

Aufgabe 2.2.4: Winkeldreiteilung durch Neusis nach Archimedes

- a) Man zeichne die im Text beschriebene Figur.
- b) Man weise nach: $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OAB = 2 \cdot \sphericalangle BOC = \sphericalangle BCO$. Dann betrachte man den Außenwinkel bei O des Dreiecks ABO (verlängere BO über O hinaus) und überzeuge sich, daß $\sphericalangle BOD = 3 \cdot \sphericalangle AOE$.

Aufgabe 2.2.5: Herleitung der trigonometrischen Winkeldreiteilungsgleichung

- a) Man zeichne erneut die der archimedischen Neusis in Aufg. 2.2.4 zugrundeliegende Figur ohne den Kreis, der Übersichtlichkeit wegen mit neuen Bezeichnungen wie folgt: Vom Scheitel A des Winkels α aus werde auf dem oberen Schenkel die Strecke $r = AB$ abgetragen, dann von B aus die nächste Strecke r zum Punkt C auf dem unteren Schenkel, dann zwei weitere Strecken der Länge r nach oben zu D und wieder nach unten zu E . (Der Ausgangswinkel α darf nicht zu groß gewählt werden.) Jetzt fälle man von den drei Punkten B, C, D die Lote auf den jeweils gegenüberliegenden Schenkel, die in F, G, H auftreffen mögen (man zeichne diese Senkrechten gestrichelt ein). Dadurch sind drei zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke entstanden: $\triangle AFB \sim \triangle AGC \sim \triangle AHD$. Außerdem seien die Basen der drei entstandenen gleichschenkligen Dreiecke als $AC = x, BD = y, CE = z$ bezeichnet; die Basiswinkel sind $\alpha, 2\alpha$ und 3α (warum?). Damit sind auf dem unteren Schenkel die Teilstrecken wie folgt festgelegt: $AF = FC = \frac{x}{2}, CH = HE = \frac{z}{2}$, auf dem oberen $AB = r, BG = GD = \frac{y}{2}$.
- b) Man überzeuge sich, daß nun gilt:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{x/2}{r} = \frac{r + y/2}{x} = \frac{x + z/2}{r + y}$$

oder

$$\frac{x}{r} = \frac{2r + y}{x} = \frac{2x + z}{r + y} = \frac{x + z}{y}.$$

Durch Elimination von y ergibt sich daraus die Gleichung (2.2.4):

$$x^3 - 3r^2x - r^2z = 0,$$

wo z gegeben, x gesucht ist.

- c) Man drücke x durch $\cos \alpha$, z durch $\cos 3\alpha$ aus und gewinne so die Winkel-dreiteilungsgleichung in ihrer trigonometrischen Form: Gleichung (2.2.5).

Aufgabe 2.2.6: Die Konchoïde des Nikomedes

- a) Man überzeuge sich, daß die Polargleichung $\rho = f(\phi)$ der Konchoïde die Form

$$\rho = a + \frac{b}{\cos \phi} = a + b \cdot \sec \phi. \quad (2.6.1)$$

hat ($\phi = \sphericalangle DCF$).

- b) Wie groß ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Konchoïde von der Geraden AFB ?
- c) Man beweise, daß diese Gerade eine Asymptote ist.

Aufgabe 2.3.1: Pyramidenvolumen nach Euklid

- a) In den „Elementen“, XII,3 wird eine beliebige dreiseitige Pyramide $ABCD$ mit der Grundfläche $\mathcal{G}$ und der Höhe h durch Schnitte durch die Mittelpunkte E, F, G, H, L, K der Kanten in der in Abb. 2.6.1a) gezeigten Weise in zwei zur Ausgangspyramide ähnliche Pyramiden $P_1 = HKLD, P_2 = GFCL$ und zwei dreikantige Prismen $Pr_1 = AEGHKL$ und $Pr_2 = EBGKFL$ zerlegt, von denen an dieser Stelle schon bekannt ist, daß ihr Volumen das Produkt von Grundfläche und Höhe ist, so daß sie zusammen das Volumen $\frac{1}{4}\mathcal{G}h$ haben. (Bei Pr_1 ist die Grundfläche $\frac{1}{4}\mathcal{G}$ und die Höhe $\frac{1}{2}h$, Pr_2 denke man sich zunächst durch ein verkehrt herum aufgesetztes kongruentes Exemplar zu einem affin verzerrten Quader mit der Grundfläche $\frac{1}{2}\mathcal{G}$ und der Höhe $\frac{1}{2}h$ ergänzt und nehme dann die Hälfte dieses Produkts!) Da man mit der Vereinigung der beiden Restpyramiden P_1, P_2 analog verfahren kann, wobei aber jetzt der Faktor $\frac{1}{4}$ (als Produkt aus der 2, der Viertelung der Grundfläche und der Halbierung der Höhe) davorzusetzen ist, würde der heutige Mathematiker ohne weiteres schließen, daß das Pyramidenvolumen durch die unendliche Reihe

$$V = \mathcal{G} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^n + \dots \right), \quad (2.6.2)$$

das Volumen demnach durch deren Summe $\frac{1}{3}\mathcal{G} \cdot h$ gegeben wird. Man begründe die Formel (2.6.2) und den Wert der Reihe.

- b) Euklids Weg zu dieser Volumenformel ist viel umständlicher. Indem er benutzt, daß die aus der Pyramide abgespaltenen prismatischen Teile mehr als die Hälfte des Pyramidenvolumens betragen (Woraus folgt das?), zeigt er zunächst in XII,4-5 durch indirekten Beweis (ähnlich, wie dies später Archimedes bei seinen Herleitungen von Volumenformeln tun wird), daß die Volumina dreiseitiger Pyramiden mit gleichen Höhen sich verhalten wie ihre Grundflächen. Schließlich wird in XII,7 gezeigt, daß man jede dreiseitige Pyramide $ABCD$ durch zwei andere dreiseitige Pyramiden $DEFC$ und $ACED$, so daß je zwei von ihnen

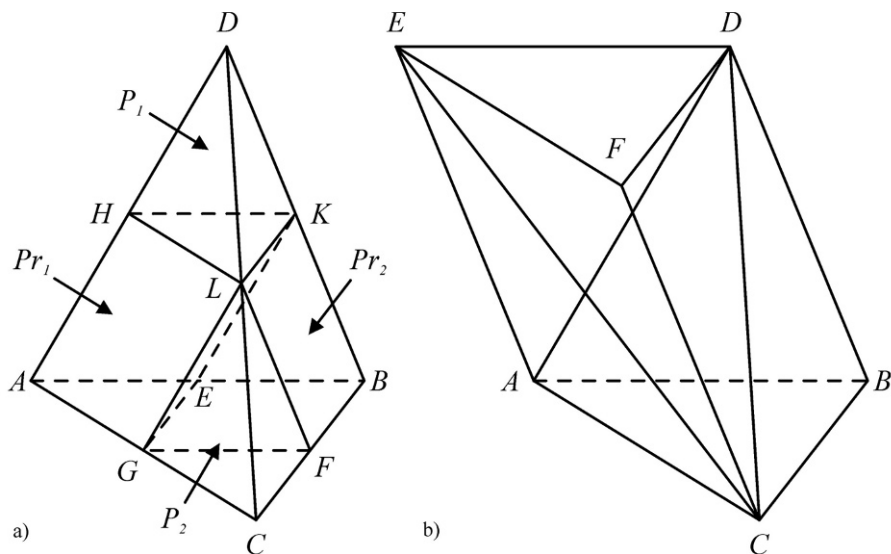


Abb. 2.6.1 Figur zu Aufg. 2.3.1

jeweils eine Grundfläche und die zugehörige Höhe gemeinsam haben, zu einem schiefen dreikantigen Prisma ergänzen kann (Abb. 2.6.1b), woraus sich die Volumenformel ergibt. Die Textstelle der „Elemente“, in der diese Folgerung explizit formuliert wird, ist allerdings möglicherweise ein späterer Zusatz. Im Verhältnis zur gar nicht offensichtlichen Grundidee von XII,7 ist sie in der Tat fast zu trivial, um noch ausgesprochen zu werden.

- c) Es gibt aber noch eine merkwürdige Methode, von der Pyramidenzerlegung in XII,3 direkt zur Volumenformel zu gelangen. Setzt man nämlich voraus, daß das Pyramidenvolumen sowohl zur Grundfläche als auch zur Höhe proportional ist, so ist in der Formel $V = cgh$ nur noch die Konstante c zu bestimmen. Aus der in XII,3 angegebenen Zerlegung ergibt sich dann eine lineare Gleichung für die Konstante c mit der Lösung $c = \frac{1}{3}$ [Schreiber 1994]. Stellen Sie die Gleichung auf.

Aufgabe 2.3.2: Konstruktion des regulären Dodekaeders aus dem Würfel

- a) In Buch XIII der „Elemente“ wird gezeigt, daß man ein reguläres Dodekaeder aus einem Würfel erhalten kann, indem man in der in Abb. 2.6.2 gezeigten Weise „Walmdächer“ auf die Würfelseiten aufsetzt. (Dies ist bis heute die eleganteste Methode, die Existenz des regulären Dodekaeders nachzuweisen.) Überlegen Sie, daß dieser Nachweis notwendig bzw. die Existenz des regulären Dodekaeders nicht selbstverständlich ist.

b) Nimmt man die Kantenlänge des gegebenen Würfels als Einheit, so ist ein beliebiges Walmdach durch die beiden Parameter x ($0 < x < 1/2$) und h (> 0) bestimmt. Diese beiden Parameter müssen jedoch vier Bedingungen erfüllen

- 1) Das Trapez eines Daches muß mit dem anschließenden Dreieck des anschließenden Daches in einer Ebene liegen. (Man verwandle dies in eine Gleichung für x und h !)
- 2) Die entstehenden Fünfecke müssen lauter gleichlange Kanten haben, d.h. der First AB eines Daches muß genauso lang sein wie die Kante AE vom First zur Würfecke. (Man verwandle auch dies in eine Gleichung für x und h !)
- 3) Die Winkel der Fünfecke müssen gleich sein. (Wenn 1) und 2) schon erfüllt sind, genügt dafür, daß jede Diagonale der Art BD und jede Diagonale der Art AC gleich der Diagonale CE , also gleich 1, ist.)

Man prüfe nach, daß (wunderbarerweise!) die durch die Bedingungen 1) und 2) schon eindeutig bestimmte Lösung x, h auch die beiden Bedingungen 3) erfüllt.

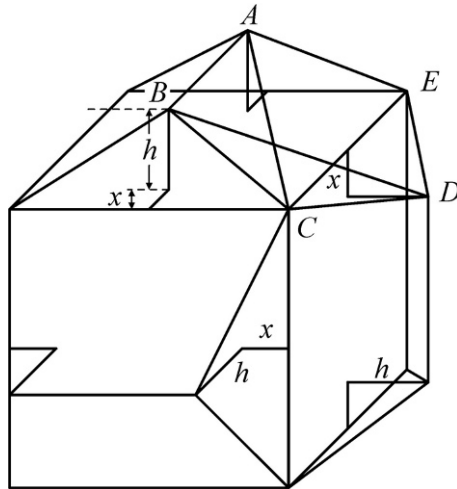


Abb. 2.6.2 Figur zu Aufg. 2.3.2

c) Aus der beschriebenen Konstruktion des regulären Dodekaeders ergibt sich, daß umgekehrt jedem Dodekaeder fünf Würfel eingeschrieben sind. Betrachten wir das reguläre Fünfeck $ABCDE$ aus Abb. 2.6.2 als Seitenfläche eines regulären Dodekaeders, so könnte jede der fünf Diagonalen die Rolle der Würfelkante CE übernehmen. Eine Kongruenzabbildung des regulären Dodekaeders auf sich wird gegeben, indem man i) für eine willkürlich ausgewählte Ecke A die Bildecke $f(A)$ festlegt, ii) für eine der drei von A ausgehenden Kanten k eine der drei von $f(A)$ ausgehenden Kanten als Bildkante und iii) für eine der an die gewählte Kante k grenzenden Flächen eine der beiden in Frage kommenden Bildflächen

auswählt. Demnach gibt es 20 (Eckenzahl des Dodekaeders) mal 3 mal 2 gleich 120 Deckabbildungen des regulären Dodekaeders auf sich. Es zeigt sich, daß die Gruppe dieser 60 orientierungserhaltenden Abbildungen des regulären Dodekaeders auf sich (das sind Drehungen um seinen Mittelpunkt) isomorph zur Gruppe A_5 der geraden Permutationen der fünf einbeschriebenen Würfel ist. Man gebe eine umkehrbar eindeutige Abbildung von der Menge der Drehungen des Dodekaeders auf diese Menge von Permutationen der Würfel an und beweise die Isomorphie beider Gruppen. Dieser Zusammenhang erwies sich als von großer Bedeutung für die Nichtauflösbarkeit der Gruppe S_5 und folglich für den Satz von Ruffini und Abel über die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades in Radikalen. Dies zeigt ein weiteres Mal, wie eng Theorien und Sätze der neuzeitlichen Mathematik oft mit bis auf Euklid zurückgehenden Wurzeln verbunden sind.

Aufgabe 2.3.3: Teilung von Dreiecken in gegebenem Flächenverhältnis

Aufgabe 19 der Schrift Euklids über die Teilung von Figuren verlangt, ein gegebenes Dreieck ABC mittels einer durch einen gegebenen Punkt D gehenden Geraden in zwei flächengleiche Teilstücke zu zerlegen.

- a) Man reduziere diese Aufgabe darauf, aus den Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks und zwei die Lage von D bezüglich des Dreiecks charakterisierenden weiteren Strecken d, e eine Strecke zu bestimmen, deren Kenntnis die Konstruktion der gesuchten Geraden ermöglicht.
- b) Man löse das reduzierte Problem auf algebraische Weise und folgere daraus die Lösbarkeit der Aufgabe mit Zirkel und Lineal.
- c) Man überlege sich, wie die in b) gefundene Lösung auf der Basis von Buch II der „Elemente“ mit Zirkel und Lineal bewerkstelligt werden könnte.
- d) Man untersuche (über Euklid hinausgehend), wie die Lösbarkeit und die Anzahl der Lösungen von der Lage des Punktes D bezüglich des Dreiecks abhängen. (Ist z.B. D der Schwerpunkt des Dreiecks, so gibt es ja drei Geraden der gesuchten Art.)
- e) Wie ändert sich alles, wenn statt Halbierung des Flächeninhalts die Teilung in einem anderen gegebenen Verhältnis gefordert wird? (Euklid behandelt am Beispiel 1:3 die Teilung in beliebigem rationalem Verhältnis.) Muß dieses Verhältnis, etwa durch eine willkürlich geteilte Strecke gegeben, irgendwelchen Bedingungen genügen, damit die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar bleibt? Hinweis: Die historische Lösung der Aufgaben a), b) kann man in [Schreiber 1987] finden, eine Lösung von d) in [Schreiber 1994].

Aufgabe 2.3.4: Halbierung eines Dreiecks mit aufgesetztem Kreisabschnitt

Eine weitere Aufgabe (Nr. 28) aus der „Teilung von Figuren“ verlangt, eine Figur, die aus einem Dreieck und einem auf eine der Dreieckseiten nach außen aufgesetzten Kreisabschnitt besteht, durch eine Gerade in zwei flächengleiche Hälften zu teilen, die durch den Mittelpunkt des Kreisbogens geht. In Abb. 2.6.3 ist die historische Lösung dieser Aufgabe ohne Begründung eingezeichnet. Wer die Konstruktionsvorschrift bzw. ihre Rechtfertigung daraus nicht rekonstruieren kann, sei auf [Schreiber 1987] verwiesen.

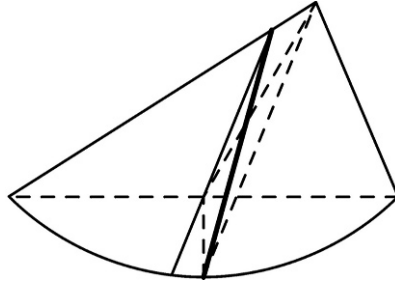


Abb. 2.6.3 Figur zu Aufg. 2.3.4

Aufgabe 2.3.5: Scheinbarer Mittelpunkt einer Strecke in Abhängigkeit vom Betrachterstandpunkt

In seiner „Optik“ wirft Euklid die Frage auf, von welchen Punkten aus man eine durch den Punkt B ungleich geteilte Strecke AC so sehen kann, daß sie halbiert wirkt. Daß es unendlich viele solche Punkte gibt, folgt sofort aus dem Peripheriewinkelsatz: Man kann den gemeinsamen Sehwinkel α , unter dem die Teilstrecken erscheinen sollen, sogar vorgeben (Abb. 2.6.4). Möglicherweise entstand aus diesem Problem der Satz des Apollonios, der Kreise als geometrischen Ort derartiger Punkte in einer Ebene charakterisiert [Schreiber 1994]: Sind A, B, C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden gegeben, so konstruiere man mit einem beliebigen Sehwinkel α den zugehörigen Augpunkt P als Schnitt der beiden Faßkreise k_1, k_2 . Bezeichnet M das Homothetiezentrum dieser beiden Kreise, so ist $MA : MB = MB : MC$, also $MB^2 = MA \cdot MC$. Daher ist M allein durch A, B, C bestimmt und von α bzw. P unabhängig. Da P auch durch Spiegelung von B an der Geraden g durch die Mittelpunkte der beiden Kreise entsteht, ist $PM = BM$, d.h. der variable Punkt P liegt stets auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius MB (Abb. 2.6.5). Um zu derjenigen Charakterisierung dieses Kreises mittels A, B, C zu gelangen, die der Satz des Apollonios aussagt, bezeichnen wir AB mit a, BC mit b, PA mit c, PC mit e (Abb. 2.6.5) Da nach dem Sinussatz

$$\begin{aligned} \text{in Dreieck } ABP \quad a : c &= \sin \sphericalangle APB : \sin \sphericalangle ABP, \\ \text{in Dreieck } BCP \quad b : e &= \sin \sphericalangle BPC : \sin \sphericalangle CBP \end{aligned}$$

und letzterer gleich dem Sinus seines Nebenwinkels $\sphericalangle ABP$ ist, ist $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC$ (gleichbedeutend mit $\sin \sphericalangle APB = \sin \sphericalangle BPC$) genau dann, wenn $PA : PC = c : e = a : b$. Daher kann der als Ort aller Punkte P mit $\sphericalangle APB = \sphericalangle CBP$ charakterisierte Kreis auch als Menge aller Punkte P mit $PA : PC = a : b$ charakterisiert werden (Apollonios). Man vollziehe diese Überlegungen nach.

Zwei weitere modern aufbereitete Aufgaben im Anschluß an Euklids „Optik“ findet man in [Schreiber 1995].

Aufgabe 2.4.1: Aristarch von Samos (um 310 – um 230 v. Chr.) hat ein Stück des von Euklid in seiner „Optik“ skizzierten Programms verwirklicht, durch geometrische

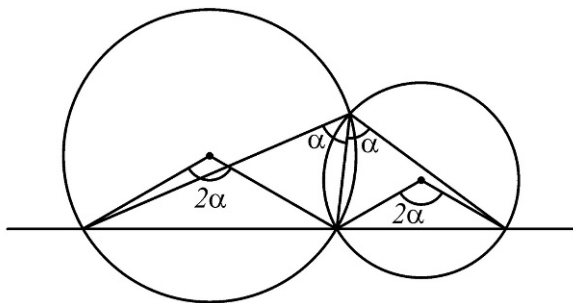


Abb. 2.6.4 Figur zu Aufg. 2.3.5

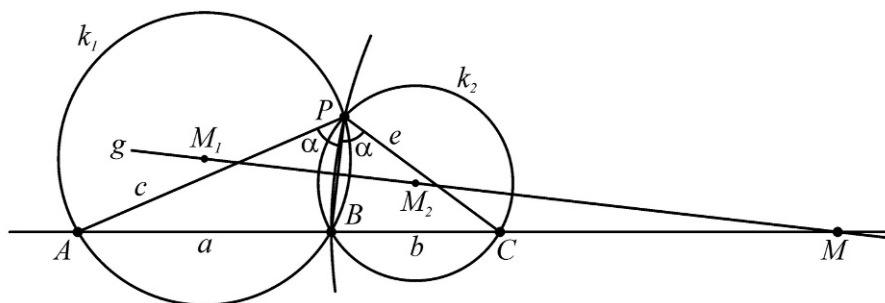


Abb. 2.6.5 Figur zu Aufg. 2.3.5

Überlegungen aus beobachtbaren Fakten auf die wirklichen Größen und Entfernungen weit entfernter Objekte zu schließen. Der Leser fertige zu den folgenden Gedanken selbst Prinzipzeichnungen an und vollziehe daran die Schlüsse Aristarchs nach.

- a) Wenn von der Erde aus genau die Hälfte des Mondes beleuchtet erscheint („Halbmond“), bilden Mond, Sonne und Erde (genauer: der Standpunkt des Beobachters auf der Erde) ein beim Mond rechtwinkliges Dreieck, dessen Form bzw. Seitenverhältnisse durch den zu messenden Sehwinkel zwischen Mond und Sonne völlig bestimmt sind. (Die praktischen Schwierigkeiten bestehen darin, daß
 - 1) der genaue Zeitpunkt des Halbmondes nicht leicht zu bestimmen ist,
 - 2) der Mond schlecht zu erkennen ist, wenn gleichzeitig die Sonne am Himmel steht,
 - 3) der Sehwinkel sehr nahe bei 90 Grad liegt und folglich geringe Meßfehler bereits sehr große Auswirkungen auf die Seitenverhältnisse haben.)

Aristarch fand für das Abstandsverhältnis Erde-Sonne: Erde-Mond die untere Schranke $18 : 1$ und die obere Schranke $20 : 1$, folglich einen viel zu kleinen Relativwert für den Sonnenabstand, obwohl er durch einen mathematischen Trick aus Euklids „Optik“ die Abschätzung zu verbessern suchte.

- b) Unter der zu beobachtenden Annahme, daß bei einer totalen Sonnenfinsternis der Mond die Sonne ziemlich genau bedeckt, ergibt sich für das Verhältnis der Durchmesser beider Himmelskörper ebenfalls ein Wert von ungefähr $19 : 1$.
- c) Man beobachtet, daß bei einer Mondfinsternis der Mond etwa die gleiche Zeit benötigt, um vollständig in den Kernschatten der Erde einzutauchen, wie um unmittelbar anschließend daran auf der anderen Seite des Schattens wieder hervorzukommen. Demnach ist der Kernschatten der Erde an der Stelle, an der der Mond ihn durchquert, etwa doppelt so breit wie der Monddurchmesser. (Man begründe dies und vergleiche es mit dem Phänomen eines Zuges, der genau so lange braucht, vollständig in einem Tunnel zu verschwinden, wie um an der anderen Seite wieder zu erscheinen!) Was kann man daraus unter Benutzung der Ergebnisse von a) und b) über die Durchmesser von Erde und Mond erschließen?
- d) Da der gemeinsame Wert des Schwinkels, unter dem Sonne bzw. Mond erscheinen, je etwa $0,5$ Grad beträgt (Aristarch hatte einen größeren Näherungswert), entspricht der Umfang beider Kreisbahnen je etwa 720 Durchmessern der betreffenden Himmelskörper. Kennt man (laut Eratosthenes) einen ungefähren Wert für den Erddurchmesser, so hat man nun auch absolute Näherungswerte für die Durchmesser und die Entfernungen von Sonne und Mond. Obwohl Aristarch auf Grund des laut a) gemessenen Winkels einen viel zu kleinen Wert für den Durchmesser und die Entfernung der Sonne erhielt, ergab sich das qualitativ richtige Resultat, daß die Sonne beträchtlich größer als die Erde ist. Aristarch zog daraus die Konsequenz, es sei sehr unglaubhaft, daß die riesige Sonne sich um die kleine Erde dreht. Das Gegenteil sei anzunehmen. In der Antike konnte sich diese Ansicht nicht gegen die übermächtige Physik des Aristoteles durchsetzen. Copernicus jedoch wußte von seinem Vorgänger und erwähnte ihn ausdrücklich.

Aufgabe 2.4.2: Die Spirale des Archimedes

- a) Man gebe die Untermenge derjenigen Punkte auf der archimedischen Spirale an, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.
- b) Inwiefern kann die Archimedische Spirale als Hilfsmittel zur Rektifikation (Ausstreckung) des Kreisumfangs verwendet werden und damit indirekt zur Konstruktion von π ?
- c) Auch die Dreiteilung eines beliebigen Winkels kann geleistet werden, wenn eine Archimedische Spirale als gegeben angenommen wird. Wie hat man vorzugehen?
- d) Man bestätige mit Hilfe der Differentialrechnung das Ergebnis von Archimedes für die Subtangente. Wie kann man daraus eine Konstruktionsvorschrift für die Tangente an die archimedische Spirale gewinnen?
- e) Zeichnet man in einem Kurvenpunkt P die Normale n und bringt sie mit der über O hinaus verlängerten Subtangente zum Schnitt (der Schnittpunkt sei N), so ist die Strecke $ON = s_n$ die polare Subnormale. Man weise nach, daß gilt: $s_n = a$. (Diese Beziehung wird von Archimedes nicht angegeben!) Welche Tangentenkonstruktion ergibt sich hieraus?

Aufgabe 2.4.3: Das Problem des Apollonios

- Im Sonderfall, bei dem die drei gegebenen Kreise im Problem des Apollonios zu Punkten entartet sind, fallen alle berührenden Kreise zu einem zusammen. Wie findet man dessen Zentrum?
- Man bestimme für den Spezialfall, bei dem zwei Punkte und ein Kreis gegeben sind, dessen Mittelpunkt den gleichen Abstand von den gegebenen Punkten hat, die berührenden Kreise.
- Wie ist zu verfahren, wenn drei kongruente, sich nicht schneidende Kreise gegeben sind, deren Zentren die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden? Wie viele berührende Kreise gibt es in diesem Fall?
- Wie hat man im ausgearteten Fall, daß drei Geraden vorgegeben sind, zu verfahren?

Eine vollständige elementare Lösung für alle Fälle findet man in dem Artikel von H. Begander: Das Apollonische Berührungsproblem. Mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ 1980, Heft 5, Verlag Volk und Wissen.

Aufgabe 2.5.1: Die heronische Formel

Man beweise die heronische Formel für die Fläche Φ eines beliebigen Dreiecks $\Phi = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ nach dem Vorbild von Heron (vgl. Abb. 2.5.1).

Man zeichne den Inkreis des Dreiecks ABC (um Übereinstimmung mit den Figuren im Manuskript zu erhalten, bezeichne man die Eckpunkte mit A, B, C , von oben im Gegenuhreigersinn beginnend). Dann verbinde man dessen Mittelpunkt O mit den drei Ecken A, B, C und falle von O aus die Lote auf die drei Seiten a, b, c , deren Fußpunkte D, E, F seien. — Dadurch wird der Umfang des Dreiecks $2s = a + b + c$ in 6 paarweise gleiche Stücke geteilt, deren Länge die Strecken $s - a$, $s - b$, $s - c$ sind, also diejenigen Größen, die neben s in der zu beweisenden Formel vorkommen. Der folgende Beweisgang ist dadurch bestimmt, daß diese vier Größen geometrisch dargestellt und passend ausgedrückt werden.

Man verlängere die Dreiecksseite CDB über B hinaus um die Strecke AF bis H . Weshalb gilt jetzt: $CH \cdot OD = \Phi$ und damit $\Phi^2 = CH^2 \cdot OD^2$? Sodann errichte man die Senkrechte OL auf OC (die BC in K schneide) und die Senkrechte BL auf BC und verbinde noch C mit L . Weshalb liegen jetzt die Punkte C, O, B, L auf einem Kreis, so daß gilt $\sphericalangle COB + \sphericalangle CLB = 2R$? Da auch $\sphericalangle COB + \sphericalangle AOF = 2R$ (warum?), folgt: $\sphericalangle AOF = \sphericalangle CLB$. Daher gilt $\triangle AOF \sim \triangle CLB$. Dies führt auf $CH : HB = BD : DK$. Jetzt betrachte man $CH^2 : (CH \cdot HB) = (BD \cdot DC) : OD^2$ (warum gilt das?) und setze ein in die oben hergeleitete Beziehung $\Phi^2 = CH^2 \cdot OD^2$:

$$\implies CH^2 \cdot OD^2 = CH \cdot HB \cdot BD \cdot DC = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Aufgabe 2.5.2: Der Sehnensatz des Ptolemaios

- Man beweise den Sehnensatz des Ptolemaios: In einem geschlossenen, einem Kreis einbeschriebenen Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c, d und den Diagonalen e und f gilt: $ef = ac + bd$. (Man zeichne dazu das Viereck $ABCD$ mit den

Diagonalen $e = AC$ und $f = BD$. Weshalb sind dann die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BAC$ einander gleich? Man verbinde B mit einem auf AC gelegenen Punkt E , der so gewählt ist, daß $\triangle ABE \sim \triangle DBC$. Es ist aber auch $\triangle ABD \sim \triangle ECB$. Man bestätige, daß somit gilt: $AB \cdot CD = AE \cdot BD$ bzw. $AD \cdot BC = CE \cdot BD$, woraus durch Addition der Sehnensatz folgt.)

- b) Man betrachte den Sonderfall, daß beide Diagonalen zugleich (verschiedene) Durchmesser des Kreises sind. Welcher Lehrsatz ergibt sich?
- c) Es sei die Seite d ein Kreisdurchmesser. Der Bogen über f werde mit ϕ , derjenige über a mit ψ bezeichnet. Führt man der Kürze halber für die Sehne die Abkürzung s ein, so daß die zugehörigen Sehnen $s(\phi)$ bzw. $s(\psi)$ werden, und setzt mit Ptolemaios den Durchmesser zu 120^p an, ergibt sich $s(180^\circ - \psi) \cdot s(\phi) = s(\psi) \cdot s(180^\circ - \phi) + s(\phi - \psi) \cdot 120^p$. Worin unterscheidet sich, nach Einführung der weiteren Abkürzung $s(180^\circ - \phi) = c(\phi)$, das Resultat von der Differenzformel der Sinusfunktion?

Aufgabe 2.5.3: Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks nach Ptolemaios

Man führe die Konstruktion der Seite eines regulären Pentagons nach Ptolemaios am Einheitskreis durch und bestätige algebraisch, daß sich als Länge die Größe $s_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ergibt.

Man zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt O und (horizontalem) Durchmesser AOB , errichte in O die Senkrechte nach oben, die den Kreis in C schneide. Dann halbiere man den Radius OB in D . Mit einem in D eingesetzten Zirkel übertrage man die Strecke DC in die Strecke DE auf dem Durchmesser AB , so daß E zwischen A und O zu liegen kommt. Damit ist EB durch O im Verhältnis der stetigen Teilung geteilt (Nachweis?). Behauptet wird: $s_5 = CE$. Man hat folglich diese Strecke nur noch mit einem in C angesetzten Zirkel auf den Kreis zu übertragen, um die erste Fünfeckseite in der gewünschten Position zu erhalten.

Aufgabe 2.5.4: Herons Formel für das Kreissegment

Man überlege sich, wie Heron (oder wer immer der Erfinder war) zu der Formel (2.5.5) für die Fläche des Kreissegments gekommen sein könnte.

Aufgabe 2.5.5: Herleitung der Ellipsengleichung aus der Gärtnerkonstruktion

Man leite aus der sog. Gärtnerkonstruktion der Ellipse zugrundeliegenden Beziehung, daß die Summe der Verbindungsstrecken eines Kurvenpunktes zu zwei festen Punkten (den Brennpunkten) konstant ist, die Mittelpunktsleichung der Ellipse her.

Man wähle dazu die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 auf der x -Achse mit den Koordinaten $-e, +e$ und bezeichne die konstante Summe der Abstände des Kurvenpunktes $P = (x, y)$ von ihnen mit $2a$. Ferner beachte man, daß für die Ellipse die Beziehung $e^2 + b^2 = a^2$ gilt, wobei a die große, b die kleine Halbachse und e die lineare Exzentrizität sind.