[E1.] Es sei eine Funktion A auf den natürlichen Zahlen wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} A(0) &:= 7 \\ A(n+1) &:= \begin{cases} 3A(n)+1 & \text{falls } A(n) \text{ ungerade} \\ A(n)/2 & \text{falls } A(n) \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Verifizieren Sie, dass es eine Zahl n gibt, sodass $A(n) = 1$. *Bemerkung.* Ab da wird die Funktion langweilig. Denn dann ist $A(n+1) = 4$, $A(n+2) = 2$, $A(n+3) = 1$. Diese Folge ist berühmt und heißt auch *Achterbahnfolge*. Sie stammt von Lothar Collatz, der vermutet hat, dass, egal, was man für $A(0)$ setzt, die Funktion immer irgendwann 1 wird. Diese Vermutung ist bis jetzt unbewiesen.

[E2.] Es sei eine Funktion f auf den natürlichen Zahlen wie folgt rekursiv definiert.

$$\begin{aligned} f(0) &:= 0 \\ f(n+1) &:= 2f(n)+1 \end{aligned}$$

Berechnen Sie $f(n)$ für $n = 0, 1, \cdots, 5$.

[E3.] Zeigen Sie, dass $f(n) = 2^n - 1$ ist. *Hinweis.* Dazu müssen Sie zeigen, dass die Funktion $2^n - 1$ die Rekursionsgleichungen aus der vorigen Aufgabe erfüllt.

[E4.] Es sei $q(n) := \sum_{i=0}^{n} i^2$. Geben Sie die Rekursionsgleichung für q an und zeigen Sie, dass $q(n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$.