[G1.] Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wir bezeichnen mit $U(V)$ die Menge aller Unterräume von V. Zeigen Sie, dass $\langle U(V), \subseteq\rangle$ eine partiell geordnete Menge ist und dass für je zwei Unterräume W, W' ein Infimum und ein Supremum existiert. *Hinweis.* Das Infimum ist der Schnitt, das Supremum jedoch *nicht* die Vereinigung.

[G2.] Malen Sie den Verband $U(V)$ auf, wo $V = \mathbb{F}_2^2$.

[G3.] (Optional.) Malen Sie den Verband $U(V)$ auf, wo $V = \mathbb{F}_2^3$. *Hinweis.* Es gibt genauso viele Unterräume der Dimension 1 wie Unterräume der Dimension 2. (Das kann man abstrakt zeigen, sollte aber hier bei Ihrer Berechnung auch herauskommen.) Ist W ein Unterraum der Dimension 2, so ist der Verband der Unterräume isomorph zu $U(\mathbb{F}_2^2)$, wie in der vorigen Aufgabe beschrieben. Daraus kann man sich schnell ein Bild machen.

[G4.] Zeigen Sie, dass in allen Verbänden gilt:

$$x \sqcap (y \sqcup z) \geq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$$

Hinweis. Aufgrund der Eigenschaften von $\sqcup$ ist $a \geq b \sqcup c$, falls $a \geq b$ *und* $a \geq c$. Und es ist $a \sqcap b \geq c$, falls $a \geq c$ und $b \sqcap c$. Wenden Sie dies auf die obere Ungleichung an.