
[B1.] Bestimmen Sie den Körper $\mathbb{F}_3$, indem Sie die Additions- und Multiplikationstafeln sowie die Inversen bestimmen.

[B2.] Wir basteln einen Körper mit 4 Elementen. Dies geht in mehreren Schritten. Der Körper besitze die Elemente 0, 1, a und b. Als erstes die Addition. Der Körper hat eine Charakteristik, und diese teilt die Anzahl der Elemente. Also ist sie 2. Wir haben also: $x + x = 0$ für alle x. (Sehen Sie, wie man daraus die Inversen bestimmen kann?) Bestimmen Sie daraus die Additionstafel. Woher kennen Sie diese Tafel (dh zu welcher bereits vorgestellten Gruppe ist diese Gruppe isomorph)?

[B3.] Wir benötigen eine Multiplikation. Dabei ist die Multiplikation mit 0 und 1 bereits festgelegt. Ferner sollen $\{1, a, b\}$ eine Gruppe bilden. Wir müssen also noch 4 Produkte bestimmen: aa, ab, ba und bb. Beachten Sie: In jeder Zeile und in jeder Spalte muss ein Element der Gruppe genau einmal vorkommen und die Multiplikation ist kommutativ. Das lässt nicht viel Wahl. Wir bekommen eine Gruppe mit drei Elementen. Zu welcher bereits vorgestellten Gruppe ist diese isomorph?

[B4.] Der Körper ist eindeutig bestimmt und heißt $\mathbb{F}_4$. Zeigen Sie, dass das Polynom $x^2 + x + 1$ in $\mathbb{F}_4$ zwei Nullstellen hat, in $\mathbb{F}_2$ jedoch keine. *Hinweis.* Sie müssen nur vier bzw zwei Werte einsetzen.