Einführung in die Semantik

Marcus Kracht
II. Mathematisches Institut
Arnimallee 3
14195 Berlin
kracht@math.fu-berlin.de

8. September 2004

1 Aussagen und Aussagenlogik

Eine wichtige Aufgabe der Semantik ist es, zu erklären, warum gewisse Schlüsse zwingend sind und andere wieder nicht. Dazu zwei Beispiele:

(1.1)	Hans ist größer als Sophie.
(1.2)	Sophie ist größer als Peter.
(1.3)	Hans ist größer als Peter.

(1.4)	Hans geht in eine andere Schule als Sophie.
(1.5)	Sophie geht in eine andere Schule als Peter.
(1.6)	Hans geht in eine andere Schule als Peter.

Wir sagen, wir *schließen* (1.3) aus (1.1) und (1.2), wenn wir (1.3) als wahr erachten, weil wir (1.1) und (1.2) als wahr erachtet haben. Wir sagen, (1.3) *folgt logisch* oder *zwingend* aus (1.1) und (1.2), wenn (1.3) wahr ist, wann immer (1.1) und (1.2) wahr sind. In unserem Beispiel haben wir einen Schluß von (1.3) aus (1.1) und (1.2) sowie einen Schluß von (1.6) aus (1.4) und (1.5). Der erste Schluß ist logisch zwingend, der zweite nicht. Es ist durchaus möglich, daß Hans und Peter in dieselbe Schule gehen, obwohl (1.4) und (1.5) richtig sind. Der Schluß von (1.4) und (1.5) auf (1.6) mag zufällig richtig sein, nämlich wenn alle drei auf eine andere Schule gehen. Nur ist (1.6) dann eben nur zufällig richtig und wir haben eigentlich einen Schluß durchgeführt, der nicht logisch zwingend ist.

Definition 1.1 *Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Aussagen. Eine Aussage B* ***folgt logisch*** *aus $A_1, A_2, \ldots, A_n$, in Zeichen $A_1; A_2; \ldots; A_n \vdash B$, falls B immer dann wahr ist, wenn A_i wahr ist für alle $1 \leq i \leq n$.*

Man beachte: ist eines der A_i falsch, so darf B wahr oder falsch sein. Dies berührt nicht die Tatsache, daß B aus den A_i folgt. Sondern nur, wenn zugleich *alle* A_i wahr sind, muß eben B auch wahr sein.

Die Tatsache, daß gewisse Schlüsse zwingend sind und andere nicht, liegt allein begründet in der *Bedeutung* welche die einzelnen Sätze haben. Daß (1.3) aus (1.1) und (1.2) folgt, ist eine Folge der Bedeutung, welche (1.1), (1.2) und (1.3) haben. Diese wiederum ist eine Folge der Bedeutung, welche die einzelnen Satzteile, wie 'größer', 'ist' usw haben. Deswegen sind Folgerungsbeziehungen ein guter Test für eine semantische Theorie. Eine Theorie, welche zum Beispiel voraussagt, daß (1.6) aus (1.4) und (1.5) folgt (etwa, weil 'eine andere' irrtümlich soviel bedeutet wie 'dieselbe'), ist schlicht falsch und geht zu den Akten.

Betrachten wir nun spezielle Wörter der Sprache: und, oder, nicht, sowie die sprachlichen Verbindungen wenn ... dann und genau dann ... wenn. Ungeachtet gewisser syntaktischer Feinheiten (wie etwa der Stellung des Verbs im Satz) kann man sagen, daß wenn A und B Aussagen sind, so auch

nicht A; A und B; A oder B; wenn A, dann B; genau dann A, wenn B

Es wäre sicherlich besser, anstelle von nicht A zu sagen: es ist nicht der Fall, daß A. Da dies etwas länglich ist, bedienen wir uns dieser Abkürzung. In der Aussagenlogik ist man gewohnt, anstatt der sprachlichen Äquivalente logische Symbole zu setzen. Die obigen Aussagen werden dann wie folgt wiedergegeben:

$$\neg A;\ A \wedge B;\ A \vee B;\ A \rightarrow B;\ A \leftrightarrow B$$

Damit schafft man sich die Diskussion der äußeren Form der Aussagen von Halse. Dann sind zum Beispiel $\neg$ und $\wedge$ willkürliche Symbole, deren Bedeutung man frei wählen kann und von denen sich dann später herausstellen wird, daß sie den umgangssprachlichen Zeichen nicht und und entsprechen. Diesen Weg werden wir hier jedoch nicht gehen, um den konkreten Gehalt der Aussagen besser im Blick zu haben. An dieser Stelle soll noch Folgendes bemerkt werden. Die Aussage

$$A \text{ oder } B \text{ und } C$$

kann man auf zwei Weisen aus A, B und C herstellen. Entweder man bildet zuerst die Aussage A oder B, oder zuerst die Aussage B und C. Wie sich zeigen wird, haben diese nicht notwendig die gleiche Bedeutung. Dies gibt im normalen Leben Anlaß zur Verwirrung (und führt dazu, daß man in Gesetzestexten sehr sorgfältig formulieren muß). Damit wir dieses Problem nicht haben, setzen wir Klammern als Lesehilfen ein. Die obige Aussage wird also auf eine der folgenden Weisen notiert:

$$(A \text{ oder } B) \text{ und } C \qquad A \text{ oder } (B \text{ und } C)$$

Dies ist zwar im laufenden Text unüblich, aber die Klammern lassen sich durchaus im gesprochenen Text hören (zB als Pausen).

Was nun ist Bedeutung von solchen Aussagen? Wir nehmen dazu im Folgenden an, daß eine Aussage entweder die Bedeutung 1 hat oder die Bedeutung 0. Hat sie die Bedeutung 1, so heißt sie *wahr*, andernfalls falsch. Wir schreiben $[A]$ für die Bedeutung von A. Nun setzen wir

$$\begin{array}{c|c} & - \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cap & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cup & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \to & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \leftrightarrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Nun können wir feststellen:

$$\begin{array}{lcl} [\text{nicht } A] & = & -[A] \\ [A \text{ und } B] & = & [A] \cap [B] \\ [A \text{ oder } B] & = & [A] \cup [B] \\ [\text{wenn } A\text{, dann } B] & = & [A] \to [B] \\ [\text{genau dann } A \text{ wenn } B] & = & [A] \leftrightarrow [B] \end{array}$$

Dies bedeutet zum Beispiel: eine Aussage A und B is wahr genau dann, wenn sowohl A als auch B wahr sind. nicht A ist wahr genau dann, wenn A nicht wahr ist, dh genau dann, wenn A falsch ist.

Wir wollen dies nun benutzen, um festzustellen, welche Schlüsse logisch gültig sind und welche nicht. Eine Aussage heißt **zusammengesetzt**, falls sie die Form nicht A oder A und B, usw hat. Ist sie nicht zusammengesetzt, so heißt sie **atomar**. Offensichtlich ist die Bedeutung einer zusammengesetzten Aussage eindeutig bestimmt, wenn man die Bedeutung ihrer atomaren Bestandteile kennt. Wir sagen nun, eine **Belegung** sei eine Funktion β, welche jeder atomaren Aussage einen Wahrheitswert zuordnet. Ist A atomar, so schreiben wir $[A]^\beta$ anstelle von $\beta(A)$. Nach Definition ist $[A]^\beta \in \{0,1\}$. Wir schreiben für eine beliebige Aussage A (nicht notwendig atomar) $[A]^\beta$ für den eindeutig bestimmten Wahrheitswert, welchen A unter der Belegung β hat. Dies ist:

$$\begin{array}{lcl}
[\textsf{nicht } A]^\beta & = & -[A]^\beta \\
[A \textsf{ und } B]^\beta & = & [A]^\beta \cap [B]^\beta \\
[A \textsf{ oder } B]^\beta & = & [A]^\beta \cup [B]^\beta \\
[\textsf{wenn } A\textsf{, dann } B]^\beta & = & [A]^\beta \rightarrow [B]^\beta \\
[\textsf{genau dann } A \textsf{ wenn } B]^\beta & = & [A]^\beta \leftrightarrow [B]^\beta
\end{array}$$

Wir hatten vorher $[A]$ geschrieben und damit den Wahrheitswert von A bezeichnet. Damit haben wir den Wahrheitswert gemeint, den A faktisch hat. $[A]^\beta$ hingegen ist der Wahrheitswert, welchen A unter der Belegung β hat. So kann die Aussage (1.4): 'Hans geht auf eine andere Schule als Sophie.' im Prinzip zwei Wahrheitswerte haben, aber faktisch hat sie nur einen. Damit läßt sich nun der Unterschied zwischen einem bloß faktisch gültigen Schluß und einem formal gültigen Schluß klarmachen: der Schluß von (1.4) und (1.5) auf (1.6) ist faktisch gültig, wenn (1.6) wahr ist. Er ist aber formal falsch, weil (1.6) falsch sein *kann*, selbst wenn (1.4) und (1.5) wahr sind. Es kommt also nicht nur darauf an, was der Fall *ist*, sondern auch, was der Fall sein *könnte*.

Definition 1.2 *Eine Aussage heißt eine **Tautologie**, falls sie unter jeder Belegung wahr ist. Eine Aussage heißt **Kontradiktion**, falls sie unter jeder Belegung falsch ist. Ist A weder Tautologie noch Kontradiktion, so ist A **kontingent**.*

Die Aussage 'Heute regnet es oder es regnet nicht.' ist eine Tautologie. Sie hat nämlich die Form A oder nicht A, wo A die Aussage 'Heute regnet es.' ist. Sei $\beta(A) = 0$. Dann ist $[A]^\beta = 0$, also $[\textsf{nicht } A]^\beta = 1$ und so $[A \textsf{ oder nicht } A]^\beta = 1$. Sei nun $\beta(A) = 1$. Dann ist $[\textsf{nicht } A]^\beta = 0$ und $[A \textsf{ oder nicht } A]^\beta = 1$. Da nun entweder $\beta(A) = 0$ oder $\beta(A) = 1$, ist A unter jeder Belegung wahr, dh eine Tautologie.

Die Aussage 'Wenn Fred am Tisch ist dann ist er nicht am Tisch.' ist falsch, weil sie von der Form wenn A, dann nicht A ist, welche eine Kontradiktion ist. Die Aussage, 'Fred ist am Tisch und heute regnet es.' ist hingegen kontingent. Es kann so sein — oder auch nicht.

Satz 1.3 *Genau dann folgt B logisch aus A, wenn* wenn A dann B *eine Tautologie ist.*

Beweis. Wir nehmen an, B folgt logisch aus A. Dann gilt: für jede Belegung β ist $[B]^\beta = 1$ immer dann, wenn $[A]^\beta = 1$. Also ist für jede Belegung β entweder $[A]^\beta = 0$ oder $[B]^\beta = 1$. Dann aber ist $[\textsf{wenn } A \textsf{ dann } B]^\beta = 1$ für jede Belegung β. Sei umgekehrt der Fall, daß $[\textsf{wenn } A \textsf{ dann } B]^\beta = 1$ für jede Belegung β. Sei β eine Belegung und sei $[A]^\beta = 1$. Dann ist $[B]^\beta = 1$. Also folgt B logisch aus A. QED

Definition 1.4 *A und B sind* ***logisch äquivalent****, falls sowohl A aus B folgt als auch B aus A.*

Satz 1.5 *Genau dann sind A und B logisch äquivalent, wenn* genau dann A wenn B *eine Tautologie ist.*

Beweis. Seien A und B logisch äquivalent. Dann ist A wahr genau dann, wenn B wahr ist. Also ist für jede Belegung β: $[A]^\beta = [B]^\beta$. Dann ist aber für jede Belegung β: $[\textsf{genau dann } A\textsf{, wenn } B]^\beta = 1$. Dieser Schluß ist umkehrbar. QED

Übungen

Übung 1. Prüfen Sie, ob die folgenden Schlüsse gültig sind:

(1.7) Hans ist größer als Sophie.
(1.8) Sophie ist kleiner als Peter.
―――――――――――――――
(1.9) Hans ist größer als Peter.

(1.10) Hans tanzte gestern mit Sophie und mit Sarah.
―――――――――――――――
(1.11) Hans tanzte gestern mit Sarah.

(1.12) Hans hilft jedem, der sich selbst nicht hilft.
―――――――――――――――
(1.13) Hans hilft sich selbst nicht.

Übung 2. Sei $\beta(A) = 1$, $\beta(B) = 0$ und $\beta(C) = 1$. Berechnen Sie den Wahrheitswert unter β von folgenden Aussagen

wenn A, dann (B oder nicht C); (wenn A, dann B) oder nicht C;
nicht (A genau dann, wenn B); (nicht A) genau dann, wenn B.

Übung 3. Bestimmen Sie alle Belegungen, unter denen (A oder B) und C und A oder (B und C) jeweils *verschiedene* Wahrheitswerte besitzen. (Dazu muß man nur alle Belegungen durchgehen und die Wahrheitswerte der beiden

Aussagen ausrechnen.)

Übung 4. Zeigen Sie: ist A eine Tautologie, so ist nicht A eine Kontradiktion, und ist A eine Kontradiktion, so ist nicht A eine Tautologie.

Übung 5. Zeigen Sie: sind A und B Tautologien, so auch A und B und A oder B. Ist A und B eine Tautologie, so sind sowohl A als auch B Tautologien. Geben Sie ein Beispiel für A und B derart, daß A oder B eine Tautologie ist, aber weder A noch B Tautologien.

2 Mengen, Relationen und Funktionen

Bevor wir uns mit der Semantik von Satzteilen befassen können, müssen wir einige technische Hilfsmittel bereitstellen. Der Begriff der *Menge* ist sehr fundamental in der Mathematik, allerdings auch sehr schwer exakt zu definieren. Für unsere Zwecke reicht es aus zu wissen, daß eine Menge eine beliebige Zusammenfassung von verschiedenen Gegenständen ist. Diese Gegenstände heißen dann auch die **Elemente** dieser Menge. Es gilt nun folgende wichtige Vereinbahrung.

Extensionalität Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn jedes Element von M auch Element von N ist und jedes Element von N auch Element von M ist.

Kann man die Gegenstände, welche die Menge bilden, konkret aufzählen, schreibt man so: $M = \{2, 3, 5, 7\}$. Aufgrund des Extensionalitätsprinzips kommt es bei dieser Aufzählung weder auf die Reihenfolge der Elemente noch auf die Vielfachheit an. Daher ist $M = \{3, 5, 7, 2\}$ sowie $M = \{2, 2, 3, 5, 7, 2\}$. Man kann auch eine indirekte Form wählen, etwa indem man sagt, M sei die Menge aller Primzahlen < 10. Dies notiert man so:

$$M = \{x : x \text{ Primzahl}, x < 10\}$$

Man liest: *M ist die Menge aller x für die gilt: x ist Primzahl und $x < 10$.* Ist x ein Element der Menge M so schreiben wir $x \in M$, andernfalls $x \notin M$. Es gibt keine Beschränkung für die Anzahl und Art der Elemente, welche man in einer Menge zusammenfaßt.

Sind nun M und N beliebige Mengen, so kann man unter anderem folgende neuen Mengen bilden:

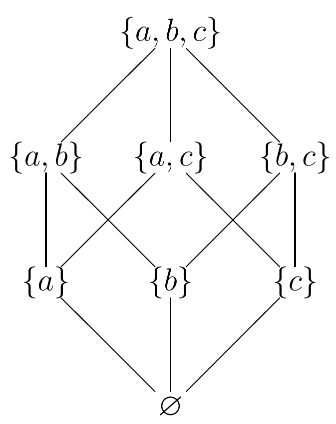
$$\begin{array}{lcl} M \cap N & := & \{x : x \in M \mathit{und}\ x \in N\} \\ M \cup N & := & \{x : x \in M \mathit{oder}\ x \in N\} \\ M - N & := & \{x : x \in M \mathit{und\ nicht}\ x \in N\} \end{array}$$

Diese heißen die **Schnittmenge**, **Vereinigungsmenge** und **Differenzmenge** von M und N. Man beachte, daß $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$, aber im allgemeinen nicht $M - N = N - M$ gilt.

Sind M und N Mengen, so ist N **Teilmenge** von M, in Zeichen $N \subseteq M$, falls jedes Element von N auch Element von M ist. Dabei darf auch $M = N$ sein. Aus der Extensionalität folgt, daß $M = N$ genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$. Die **Potenzmenge** von M ist die Menge aller N, welche Teilmenge von M sind. Die Potenzmenge von M wird mit $\wp(M)$ (alternativ $\mathcal{P}(M)$, $Pot(M)$) bezeichnet. Aufgrund unserer Notationsvereinbarung ist

$$\wp(M) = \{x : x \subseteq M\}$$

$\varnothing$ ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Diese ist aufgrund der Extensionalität eindeutig bestimmt. Ferner ist $\varnothing \subseteq M$ für jedes M. Es ist $\wp(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$ und $\wp(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Man kann die Potenzmengen in augenfälliger Weise durch das sogenannte Hasse–Diagramm aufzeichnen. Hier zum Beispiel ist das Hasse–Diagramm von $\wp(\{a, b, c\})$.



In diesem Diagramm sind die Mengen nach Inklusion angeordnet. Genau dann ist $N \subseteq M$, wenn man von N nach M gelangt, indem man den Linien nach oben folgt.

Sei X eine beliebige Menge. Die Potenzmenge $\wp(X)$ is abgeschlossen unter folgenden Operationen: Schnitt, Vereinigung und relatives Komplement:

$$-_X M := X - M = \{x : x \in X, x \notin M\}$$

Ist X bekannt, so schreiben wir auch $-M$ anstelle von $-_X M$. Wir nennen eine Struktur $\langle \wp(X), -, \cap, \cup \rangle$ eine **Potenzmengenalgebra**. Eine wichtige Algebra ist die Potenzmengenalgebra von $1 := \{\varnothing\}$. Schreiben wir 0 anstelle von $\varnothing$, so enthält die Potenzmenge von $\{\varnothing\}$ die beiden Elemente $\varnothing(= 0)$ und $\{\varnothing\}(= 1)$. Wir nennen die Menge $\wp(\{\varnothing\})$ auch 2. (Die Namenswahl ist keinesfalls zufällig. Dies entspricht genau der von VON NEUMANN gegebenen Definition der Zahlen als Mengen.) Ferner kann man Folgendes bemerken: die in Kapitel 1 definierten Operationen $\cap$, $\cup$ und $-$ auf den Wahrheitswerten sind nichts anderes als die Funktionen $\cap$, $\cup$ und $-$ auf der Potenzmengenalgebra der Menge $\{\varnothing\}$! Dies zeigt uns: falls wir an die Existenz von gewissen Mengen glauben, so existieren die Wahrheitswerte 0 und 1 zusammen mit den vorher definierten Wahrheitsfunktionen.

Seien M und N Mengen. Das **Produkt** von M und N, $M \times N$, ist die Menge aller Paare $\langle x, y \rangle$ derart, daß $x \in M$ und $y \in N$. Man kann Paare auch wiederum als Mengen auffassen, allerdings ist das nicht weiter erhellend. Für Paare gilt: $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ genau dann, wenn $x = x'$ und $y = y'$. Achtung: es ist in der Regel $M \times N \neq N \times M$! Eine **Relation** von M nach N ist eine Teilmenge von $M \times N$. Wir schreiben auch $x\ R\ y$ anstelle von $\langle x, y \rangle \in R$. Wir sagen *$x$ steht in der Relation R zu y*. Zwei Beispiele. (1) Sei M die Menge aller Mitarbeiter eines Instituts und Z die Menge der Zimmer. Sei dann $R \subseteq M \times Z$ definiert durch $\langle x, y \rangle \in R$ genau dann, wenn x im Zimmer y arbeitet. Dies ist eine Relation. (2) Sei M die Menge aller natürlichen Zahlen. (Diese Menge wird auch mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.) Dann ist $<$ (= 'ist kleiner als') eine Relation auf den natürlichen Zahlen. Der letzte Fall ist besonders wichtig. Hier haben wir $M = N$. In diesem Fall sprechen wir von R schlicht als einer **Relation auf** M. Genauer reden wir von einer **2–stelligen Relation auf** M. Wir werden höherstellige Relationen noch später kennenlernen. Für jetzt sei angemerkt, daß eine 1–stellige Relation auf M schlicht eine Teilmenge von M ist.

Da Relationen von M nach N Teilmengen von $M \times N$ sind, so bilden sie eine Potenzmengenalgebra. Es existiert dann der Schnitt $R \cap S$, die Vereinigung $R \cup S$ und das relative Komplement $-R = (M \times N) - R$. Das relative Komplement ist die übliche Verneinung. Ist etwa R die Relation 'ist Vater von', dann ist $-R$ die Relation 'ist nicht Vater von'. Ist S zusätzlich die Relation 'ist Lehrer von', so ist $R \cup S$ die Relation 'ist Vater oder Lehrer von' und $R \cap S$ die Relation ïst Vater und Lehrer von'. Diese Konstruktionen kann man auch für 1–stellige Relationen bilden; diese sind ja auch nichts anderes als Teilmengen. Interessant ist die sogenannte **konverse Relation** zu R, $R^{\smile}$. Ist R eine Relation von M nach N, so ist $R^{\smile}$ eine Relation von N nach M, definiert durch

$$x \; R^{\smile} \; y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad y \; R \; x$$

Also etwa in unserem Beispiel ist $S^{\smile}$ die Relation 'ist Schüler von'. (Wir sehen hier vom Genus ab, um das Beispiel nicht unnötig zu verkomplizieren. Zum Beispiel ist die Relation $R^{\smile}$ umgangssprachlich nicht so einfach zu fassen. Denn $x \; R^{\smile} \; y$ genau dann, wenn x Kind von y ist und y männlich ist.) Ferner: ist R eine Relation von M nach N und S eine Relation von N nach P, so ist $R \circ S$ eine Relation von M nach P, definiert durch

$$x \; R \circ S \; y \qquad \text{genau dann, wenn ein } z \text{ existiert mit} \qquad x \; R \; z \; S \; y$$

Man nennt $R \circ S$ die **Komposition** von R mit S.

Eine Relation R heißt **partielle Funktion**, falls ein gegebenes x zu höchstens einem y in Relation R steht. In Zeichen: ist $x \; R \; y$ und $x \; R \, y'$, so ist $y = y'$. Eine partielle Funktion heißt **Funktion**, falls zu jedem x ein y existiert mit $x \; R \; y$. Ist nun R eine Funktion, so sagen wir auch, y sei der **Funktionswert** von x oder der **Wert** der Funktion an der Stelle x. Die Intuition hinter einer Funktion ist denn auch, daß sie uns für gegebenes x den Wert an der Stelle x *liefert*. Deswegen verwendet man für Funktionen auch andere Symbole, etwa f (g, etc), und schreibt $f(x)$ für den Wert von f an der Stelle x. Man notiert $f : M \to N$ um zu sagen, daß f eine Funktion von M mit Werten in N ist. Ein einfaches Beispiel. Sei K die Menge der Schüler einer Klasse und $N = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Die Relation R definiert durch $x \; R \; y$ genau dann, wenn x die Note y in der letzten Klassenarbeit hatte, ist eine partielle Funktion. Denn man bekommt ja höchstens eine Note. (Es mag durchaus vorkommen, daß einige Schüler keine Note haben, weil sie zB gar nicht mitgeschrieben haben.) Wir können also alternativ von der partiellen Funktion $f : K \to N$ reden, welche jedem Schüler die Note in der letzten Arbeit zuordnet. Man schreibt im Übrigen auch $f : \text{Peter} \mapsto 3$ anstelle von $f(\text{Peter}) = 3$. Eine anderes Beispiel einer Funktion ist diejenige Funktion, welche jedem Menschen seine Größe zuordnet. Diese ist nicht partiell.

Da eine Funktion von M nach N schlicht eine Teilmenge von $M \times N$ ist, gilt für zwei Funktionen f, g von M nach N $f = g$ genau dann, wenn für jedes $x \in M$ $f(x) = g(x)$, dh wenn, wie man sagt, f und g **Wertverlaufsgleich** sind. Es sind zum Beispiel $x + 2 - 1$ und $x + 1$ wertverlaufsgleich, also die gleichen Funktionen, obwohl die Rechenvorschriften, durch die sie definiert sind, durchaus verschieden sind. Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Funktionen, so ist auch $g \circ f : M \to P$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

eine Funktion. Diese heißt auch die **Komposition** von f mit g. Seien zB $f : x \mapsto x+2$ und $g : x \mapsto x^2$ Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Dann ist $(g\circ f)(x) = (x + 2)^2$ ebenfalls eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Im Übrigen ist dann auch $(f\circ g)$ definiert und $(f\circ g)(x) = x^2+2$. Dies ist nicht die gleiche Funktion wie $g\circ f$; zum Beispiel ist $(f\circ g)(3) = 3^2+2 = 11$ und $(g\circ f)(3) = (3+2)^2 = 25$. Es ist also im Allgemeinen nicht $f \circ g = g \circ f$.

Definition 2.1 *$f : M \to N$ heißt **injektiv** falls gilt: ist $f(x) = f(x')$, so ist auch $x = x'$. f heißt **surjektiv**, falls für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ existiert, sodaß $f(x) = y$. Ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, so heißt f **bijektiv**.*

Man überlegt sich leicht, daßt eine Funktion genau dann umkehrbar ist, wenn sie bijektiv ist.

Ist $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so kann man eine Funktion $\chi_N : M \to 2$ definieren, indem man setzt: $\chi_N(x) := 1$ genau dann, wenn $x \in N$. Folglich ist $\chi_N(x) = 0$ genau dann, wenn $x \notin N$. Man nennt χ_N die **charakteristische Funktion** von N. Jeder Funktion $f : M \to 2$ kann man umgekehrt eine Menge P_f zuordnen, für die gilt: $x \in P_f$ genau dann, wenn $f(x) = 1$.

Satz 2.2 *Es sei M eine Menge. Die Abbildung $N \mapsto \chi_N$, welche jeder Teilmenge von M ihre charakteristische Funktion zuordnet, ist bijektiv. Ihre Umkehrung ist $f \mapsto P_f$.*

Beweis. Wir zeigen hier, daß die Zuordnungen $N \mapsto \chi_N$ und $f \mapsto P_f$ Umkehrungen voneinander sind. Es sei dazu $N \subseteq M$. Wir zeigen: $N = P_{\chi_N}$. Es ist nämlich

$$P_{\chi_N} = \{x : \chi_N(x) = 1\} = \{x : x \in N\} = N \ ,$$

nach Definition sowie der Extensionalität von Mengen. Nun sei $f : M \to 2$. Wir zeigen: $f = \chi_{P_f}$. Es ist nämlich $f(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in P_f$ genau dann, wenn $\chi_{P_f}(x) = 1$. Also ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $\chi_{P_f}(x) = 0$. Die Funktionen sind also gleich. QED

Übungen

ÜBUNG 6. Es sei M die Menge aller männlichen Wesen. Auf M seien zwei Relationen gegeben, nämlich: V 'Vater von' und I 'ist gleich'. Man übersetze folgende Relationen ins Deutsche:

$$\begin{array}{ll} V^{\smile} & V \circ V \\ V^{\smile} \circ V^{\smile} & A := (V^{\smile} \circ V) \cap -I \\ B := A \circ V & V^{\smile} \circ B \end{array}$$

ÜBUNG 7. Es seien folgende Schlüsse gegeben. Prüfen Sie, ob diese zwingend sind.

Hans ist der Vater von Ede.	Ede ist der Sohn von Hans.
Ede ist der Vater von Jan.	Hans ist der Vater von Bert.
Hans ist der Großvater von Jan.	Ede ist der Bruder von Bert.

Belegen Sie Ihre Schlußfolgerung mit den Ergebnissen aus der vorigen Übung.

ÜBUNG 8. Es sei $M = \{2, 3, 5, 7\}$. Wie viele Teilmengen hat M? Wie viele Teilmengen gibt es mit 0, 1, 2, 3 bzw 4 Elementen?

ÜBUNG 9. Geben Sie ein Beispiel einer Relation R derart, daß R eine Funktion ist, $R^{\smile}$ aber nicht. Zeigen Sie: genau dann ist R eine bijektive Funktion, wenn R und auch $R^{\smile}$ Funktionen sind.

ÜBUNG 10. Es seien $f, G : V \to 2$. Sei dann $f \cap g : V \to 2$ definiert durch: $(f \cap g)(x) = 1$ genau dann, wenn $f(x) = g(x) = 1$. Ist N eine Teilmenge von M, so ist $\chi_N : M \to 2$. Zeigen Sie, daß für $N, P \subseteq M$ gilt $\chi_{N \cap P} = \chi_N \cap \chi_P$.

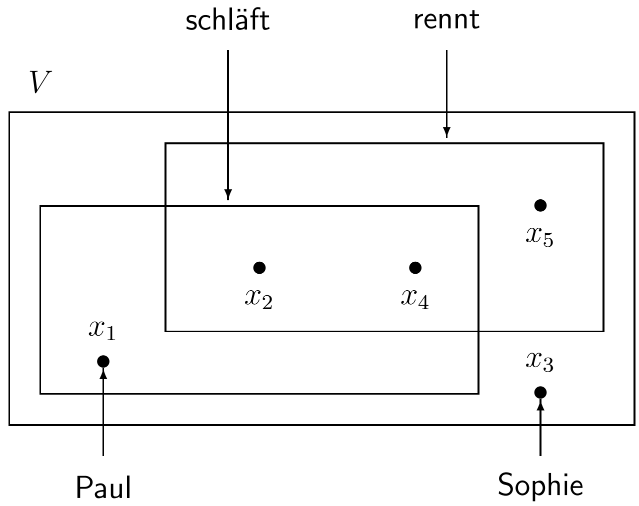
3 Der einfache Satz

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einfachen Sätzen befassen und zwar zunächst mit einfachen intransitiven Sätzen. Diese bestehen aus zwei Worten, einem Subjekt und einem Prädikat:

(3.1) Paul schläft.
(3.2) Sophie rennt.

Hierbei sind der Einfachheit halber die Subjekte Eigennamen. Die Grundidee ist nun die, daß man annimmt, der Subjektsausdruck bezeichne ein Objekt, sagen wir x, während der Prädikatsausdruck eine Menge von Objekten, etwa

M, bezeichnet. Der Satz ist genau dann wahr, wenn $x \in M$. Um dies zu konkretisieren, nehmen wir an, unser Universum bestehe lediglich aus 5 Dingen. Es sei $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Ein Eigenname bezeichnet ein Ding, etwa bezeichne Paul das Objekt x_1 und Sophie das Objekt x_3. Ferner bezeichne schläft die Menge $M_1 := \{x_1, x_2, x_5\}$ und rennt die Menge $M_2 := \{x_2, x_4, x_5\}$. Dann ist (3.1) wahr, (3.2) aber nicht. Denn $x_1 \in M_2$ aber $x_3 \notin M_2$.



Wir werden diese Intuition nun in eine Definition gießen. Dazu nehmen wir an, unsere Sprache, genannt L, bestünde nur aus Eigennamen und intransitiven Verben (im Singular, Präsens, Indikativ, Aktiv, dritte Person). Etwa sei

$$L = \{\mathsf{Paul}, \mathsf{Sophie}, \mathsf{rennt}, \mathsf{schläft}\}$$

Wir bezeichnen die Verkettung von zwei Worten mit $^\frown$. Also ist (3.1) gleich Paul$^\frown$schläft.

Definition 3.1 *Es sei V eine beliebige Menge. Eine* ***(relationale) Interpretation*** *von L in V ist eine Funktion I, welche Eigennamen ein Element aus V zuordnet und intransitiven Verben Teilmengen von V. Das Paar $\mathfrak{M} := \langle V, I\rangle$ heißt ein* ***(relationales) Modell*** *von L.*

Zu einem Modell gehört nun auch ein sogenannter Erfüllungsbegriff. Diese ist eine Relation zwischen Modellen und Sätzen der Sprache. Er erklärt, wann ein Satz als wahr gilt.

Definition 3.2 *Es* $\mathfrak{M} = \langle V, I\rangle$ *ein Modell für* L*,* A *ein Eigenname und* B *ein intransitives Verb. Dann ist* A⌢B ***wahr*** *in* $\mathfrak{M}$*, falls* $I(\mathsf{A}) \in I(\mathsf{B})$*.*

Man beachte hierbei, daß diese Regel zwei Dinge miteinander verzahnt: den Aufbau des Satzes als syntaktisches Gebilde und seine Bedeutung. Dazu kommt allerdings auch, daß die Wahrheit des Ausdrucks A⌢B erklärt wird, nicht jedoch von B⌢A. Die folgende Sätze haben demnach keine Wahrheitswert.

(3.3) Schläft Paul.
(3.4) Rennt Sophie.

((3.3) und (3.4) sollen hier als Aussagen, nicht als Fragen verstanden werden!) Dies ist nicht wünschenswert, denn es gibt Sprachen, in denen diese Reihenfolge die normale Reihenfolge im Satz ist. Das Gälische ist so eine Sprache. Man hat dann die Wahl, entweder die Definition zu ändern, oder aber sie unabhängig von der Reihenfolge zu machen. Dies kann man wie folgt tun. Wir führen die Notation [A B] ein. Dies bezeichnet die von A und B gebildete Konstituente, unabhängig von ihrer Reihenfolge. Also bezeichnet für Worte A und B: [B A] sowohl A⌢B als auch B⌢A. Im Allgemeinen gilt also:

$$[\mathsf{A}\ \mathsf{B}] = [\mathsf{B}\ \mathsf{A}]$$

Also [A [B C]] = [[C B] A]. Dieser Konstituente entsprechen also insgesamt 4 Zeichenketten (falls A, B und C Worte sind).

Definition 3.3 *Es* $\mathfrak{M} = \langle V, I\rangle$ *ein Modell für* L*,* A *ein Eigenname und* B *ein intransitives Verb. Dann ist* [A B] ***wahr*** *in* $\mathfrak{M}$*, falls* $I(\mathsf{A}) \in I(\mathsf{B})$*.*

Die Wortfolgen (3.3) und (3.4) sind damit wahr bzw falsch, aber ungrammatisch. Wir können dieses Modell ein wenig ausdehnen, indem wir anstelle von einfachen Prädikaten gewisse Kombinationen, wie etwa nicht A, A und B, A oder B zulassen. Dies bedeutet, daß wir zu L nunmehr die Worte und, oder und nicht hinzufügen. Diese sollen jetzt aber nicht zur Bildung komplexer Satzverbindungen benutzt werden (wie das geht, wurde schon in Kapitel 1 besprochen. Vielmehr wollen wir sie zur Bildung komplexer Prädikate verwenden wie etwa schäft nicht oder schläft oder rennt. Wir wollen dehalb vereinbahren, daß

$$\begin{array}{lcl} I(\mathsf{nicht\ A}) & := & V - I(\mathsf{A}) \\ I(\mathsf{A\ und\ B}) & := & I(\mathsf{A}) \cap I(\mathsf{B}) \\ I(\mathsf{A\ oder\ B}) & := & I(\mathsf{A}) \cup I(\mathsf{B}) \end{array}$$

Offensichtlich kann man damit also ein nicht banales Stück der natürlichen Sprache erfassen.

Zu guter Letzt wollen wir die Definitionen noch einmal umbauen. Es ist nämlich unbefriedigend, daß wir den Wahrheitswert einer Aussage wie (3.1) und (3.2) nicht einfach geliefert bekommen, sondern ihn selber bestimmen müssen. Dies wird sich zum Beispiel bei transitiven Sätzen als großer Nachteil herausstellen. Deswegen gehen wir dazu über, einem intransitiven Verb nicht eine Menge M, sondern an ihrer Stelle deren charakteristische Funktion χ_M zuzuweisen. In unserem Beispiel ist dann die Interpretation von $\mathsf{schläft}$ nicht $M_1 = \{x_1, x_2, x_5\}$ sondern die Funktion χ_{M_1} und die Interpretation von rennt nicht $M_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$ sondern die Funktion χ_{M_2}:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \chi_{M_1} & \\
x_1 & \mapsto & 1 \\
x_2 & \mapsto & 1 \\
x_3 & \mapsto & 0 \\
x_4 & \mapsto & 0 \\
x_5 & \mapsto & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \chi_{M_2} & \\
x_1 & \mapsto & 0 \\
x_2 & \mapsto & 1 \\
x_3 & \mapsto & 0 \\
x_4 & \mapsto & 1 \\
x_5 & \mapsto & 1
\end{array}
$$

Nun können wir die Wahrheitswerte von Sätzen einfach ausrechnen, indem wir die Funktionen auf die jeweiligen Objekte anwenden. Zum Beispiel ist (3.1) wahr, weil Paul das Objekt x_1 bezeichet und $\mathsf{schläft}$ die Funktion χ_{M_1} und es ist $\chi_{M_1}(x_1) = 1$. Ebenso ist (3.2) falsch in diesem Modell, denn $\chi_{M_2}(x_3) = 0$.

Definition 3.4 *Es sei V eine beliebige Menge. Eine* ***(funktionale) Interpretation*** *von L in V ist eine Funktion J, welche Eigennamen ein Element aus V zuordnet und intransitiven Verben Funktionen von V nach* $\{0, 1\}$. *Das Paar $\mathfrak{M} := \langle V, J\rangle$ heißt ein* ***(funktionales) Modell*** *von L. Sei A ein Eigenname und B ein intransitives Verb. Dann ist der Wahrheitswert von* $[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]$ *gleich $J(\mathsf{B})(J(\mathsf{A}))$.*

Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Modelle. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sollen **wahrheitsäquivalent** heißen, falls alle Sätze der Sprache denselben Wahrheitswert erhalten. Zu jedem relationalen Modell über V gibt es ein wahrheitsäquivalentes funktionales Modell über dem gleichen Universum, und zu jedem funktionalen Modell ein äquivalentes relationales Modell. Wir müssen lediglich die Interpretation der intransitiven Verben ändern. Das eine Mal ist sie eine Teilmenge des Universums, das andere Mal die charakteristische Funktion dieser Teilmenge.

Wenden wir uns nun den transitiven Sätzen zu. Unsere Sprache soll jetzt nicht nur Eigennamen und intransitive Verben sondern auch transitive Verben enthalten, etwa

sieht, bewundert, ärgert

Die folgenden Sätze sind dann (im Deutschen) grammatisch:

(3.5) Sophie ärgert Paul.
(3.6) Paul sieht Sophie.

Wir haben schon oben gegen die Auffassung plädiert, intransitiven Verben Teilmengen des Universums zuzuordnen. Wir wollen hier zeigen, zu welchen Resultaten das führen kann. Nehmen wir dazu an, transitive Verben bezeichnen schlicht 2–stellige Relationen auf dem Universum. Dann führen als Klausel für die Interpretation ein, daß $I(\mathsf{A}) \subseteq V \times V$ sein soll, falls A ein transitives Verb ist. Schließlich sagen wir: der Satz $\mathsf{A}^\frown\mathsf{B}^\frown\mathsf{C}$ sei wahr, falls $\langle I(\mathsf{A}), I(\mathsf{C})\rangle \in I(\mathsf{B})$ ist. Etwa sei

$$\begin{array}{lcl} I(\textsf{ärgert}) & := & \{\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_1, x_3\rangle, \langle x_4, x_3\rangle, \langle x_5, x_1\rangle\} \\ I(\textsf{sieht}) & := & \{\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_1, x_3\rangle, \langle x_4, x_3\rangle, \langle x_5, x_1\rangle, \langle x_5, x_4\rangle\} \end{array}$$

Dann ist (3.5) falsch und (3.6) wahr. Denn $I(\textsf{Paul}) = x_1$, $I(\textsf{Sophie}) = x_3$, sowie $\langle x_3, x_1\rangle \notin I(\textsf{ärgert})$ aber $\langle x_1, x_3\rangle \in I(\textsf{sieht})$. Man beachte hier, daß es bei Paaren — wie im vorigen Abschnitt definiert — auf die Reihenfolge ankommt. Das ist wünschenswert. Es ist nämlich $\langle x_1, x_3\rangle \in I(\textsf{ärgert})$, und damit ist der Satz (3.7) wahr, während (3.5) wie oben gesehen falsch ist.

(3.7) Paul ärgert Sophie.

Soweit läuft also alles wie gewünscht. Allerdings kann man mit diesem Vorgehen nicht der Tatsache Rechnung tragen, daß alle Konstituenten binär verzweigend sind. Der Satz (3.5) hat nämlich, syntaktisch gesehen, folgende Struktur.

(3.5) [Sophie [ärgert Paul]].

Wir würden nun gerne jeder Teilkonstituente eine Bedeutung geben, nicht nur dem ganzen Satz. Ansonsten wäre das Programm, die Satzbedeutung aus seinen Teilen herzuleiten, wahrscheinlich illusorisch. Wir wollen also eine Bedeutung haben für die Verbalphrase ärgert Paul. Was könnte das sein? Intuitiv gesprochen ist diese Konstituente nichts anderes ein intransitives Verb. Dementsprechend werden wir ihm als Bedeutung eine Funktion von

$V \to \{0, 1\}$ geben. In unserem Beispiel ist dies diejenige Funktion, welche 1 ergibt, wenn das Individuum Paul ärgert, und 0 sonst. Blicken wir auf unsere Relation für ärgern, sehen wir, daß nur x_5 x_1 ärgert. Also ist

$$J(\mathsf{ärgert\ Paul})$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \mapsto & 0 \\ x_2 & \mapsto & 0 \\ x_3 & \mapsto & 0 \\ x_4 & \mapsto & 0 \\ x_5 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Nennen wir diese Funktion die **Paul–Ärgerer–Funktion**. Welche Funktion ist dann aber $J(\mathsf{ärgert})$? Nun, wir können offensichtlich jedem x die x–Ärgerer–Funktion zuordnen. Diese ist wiederum die Funktion, welche jedem y den Wert 1 gibt, falls y x ärgert, und 0 sonst.

Damit dies etwas verständlicher wird, gehen wir zurück auf die Relation $I(\mathsf{ärgert})$. Dieser können wir ihre charakteristische Funktion zuordnen, welche wir χ nennen wollen. Es ist also

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl} \langle x_1, x_1 \rangle & \mapsto & 0 & \langle x_2, x_1 \rangle & \mapsto & 0 \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \mapsto & 1 & \langle x_2, x_2 \rangle & \mapsto & 0 \\ \langle x_1, x_3 \rangle & \mapsto & 0 & \langle x_2, x_3 \rangle & \mapsto & 0 \\ \langle x_1, x_4 \rangle & \mapsto & 0 & \langle x_2, x_4 \rangle & \mapsto & 0 \\ \langle x_1, x_5 \rangle & \mapsto & 0 & \langle x_2, x_5 \rangle & \mapsto & 0 \end{array}$$

und so weiter. Dies ist *nicht* die Funktion, die wir momentan suchen. Denn χ ist eine Funktion, welche zwei Argumente braucht und einen Wahrheitswert ausgibt. Wir suchen dagegen diejenige Funktion ρ, welche angewendet auf x eine Funktion ergibt, welche angewendet auf y den Wert $\chi(y, x)$ ergibt. Es soll also gelten

$$\rho(x)(y) = \chi(y, x)$$

Man überlegt sich leicht, daß die Funktion eindeutig bestimmt ist. Dazu sei ρ' eine zweite Funktion mit $\rho'(x)(y) = \chi(y, x)$. Dann ist $\rho(x)(y) = \rho'(x)(y)$ für alle x und alle y. Also ist $\rho(x) = \rho'(x)$ für alle x, und so $\rho = \rho'$. Ist umgekehrt ρ gegeben, so ist auch χ eindeutig bestimmt. Es macht also gar nichts aus, ob wir transitiven Verben nun 2–stellige Relationen, 2–stellige Funktionen oder 1–stellige Funktion mit Werten in 1–stelligen Funktionen zuordnen. Diese stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zueinander. Aber der letzte Typ von Funktionen erlaubt es uns, die Verbalphrase semantisch zu reifizieren. Ist die Bedeutung von $\mathsf{ärgert}$ die Funktion ρ, die Bedeutung von Paul das Objekt x_1 so ist die Bedeutung von $[\mathsf{ärgert\ Paul}]$ die Funktion $\rho(x_1)$ (genannt *Paul–Ärgerer–Funktion*) und damit ist die Bedeutung von $[\mathsf{Sophie\ ärgert\ Paul}]$ (= (3.5)) gleich $\rho(x_1)(x_3) = \chi(x_1, x_3) = 0$. Damit erhalten wir unsere abschließende Definition:

Definition 3.5 *Es sei V eine beliebige Menge. Eine **(funktionale) Interpretation** von L in V ist eine Funktion J, welche Eigennamen ein Element aus V zuordnet, intransitiven Verben Funktionen von V nach $\{0, 1\}$ und transitiven Verben Funktionen von V, deren Werte Funktionen von V nach $\{0, 1\}$ sind. Das Paar $\mathfrak{M} := \langle V, J\rangle$ heißt ein **Modell** von L. Jeder Konstituente A wird eine Interpretation $[\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}$ wie folgt zugeordnet. Ist $\mathsf{A} \in L$, so sei $[\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}} := J(\mathsf{A})$. Seien A und B Konstituenten und ist $[\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}$ eine Funktion, welche $[\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}$ als Argument nimmt, dann ist $[[\mathsf{A\ B}]]^{\mathfrak{M}}$ definiert und es ist*

$$[[\mathsf{A\ B}]]^{\mathfrak{M}} := [\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}([\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}) .$$

In dieser Definition taucht der Begriff Wahrheitswert (dh ein Element aus $\{0, 1\}$) gar nicht mehr auf. Das ist auch gar nicht nötig. Man überlege sich nämlich, daß falls eine Wortfolge ein Satz ist, so ist seine Interpretation automatisch ein Wahrheitswert!

Übungen

Übung 11. Es sei $W := \{y_1, y_2, y_3\}$ und

$$\begin{array}{lcl}
I(\mathsf{Paul}) & := & y_3, \\
I(\mathsf{Sophie}) & := & y_1, \\
I(\mathsf{schläft}) & := & \{y_2, y_3\}, \\
I(\mathsf{rennt}) & := & \{y_1, y_2\}, \\
I(\mathsf{sieht}) & := & \{\langle y_1, y_2\rangle, \langle y_2, y_2\rangle, \langle y_3, y_2\rangle, \langle y_3, y_3\rangle\}, \\
I(\mathsf{ärgert}) & := & \{\langle y_2, y_1\rangle, \langle y_2, y_2\rangle, \langle y_3, y_1\rangle, \langle y_3, y_2\rangle, \langle y_3, y_3\rangle\}.
\end{array}$$

Dies sei das Modell $\mathfrak{N} = \langle W, I\rangle$. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte von (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) und (3.7).

Übung 12. Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen von $I(\mathsf{schläft})$

und $I(\mathsf{rennt})$. Bestimmen Sie ein zu $\mathfrak{N}$ wahrheitsäquivalentes funktionales Modell.

Übung 13. Stellen Sie die Funktion $\rho := J(\mathsf{sieht})$ wie dar, indem Sie zu jedem $x \in W$ die Funktion $\rho(x) : W \to \{0, 1\}$ konkret angeben.

Übung 14. Geben Sie die charakteristische Funktion von rennt nicht, schläft und rennt, rennt oder schläft an. Welche der folgenden Sätze sind also wahr in $\mathfrak{N}$?

(3.8) Paul rennt nicht.
(3.9) Sophie schläft und rennt.
(3.10) Sophie schläft oder rennt.

Übung 15. Überlegen Sie intuitiv (dh nicht formal), ob in dem Modell $\mathfrak{N}$ die folgenden Sätzen wahr sind:

(3.11) Paul sieht sich selbst.
(3.12) Jemand sieht Sophie.
(3.13) Sophie wird von Paul geärgert.

Begründen Sie Ihre Ansicht.

4 Typen und Kategorien

In diesem Abschnitt werden wir die Erkenntnisse des vorigen Abschnitts noch weiter vertiefen. Dazu wollen wir uns daran erinnern, daß wir den verschiedenen Satzteilen verschiedene Sorten Bedeutungen zugeordnet haben. Eigennamen haben wir Objekte zugeordnet, intransitiven Verben Funktionen vom Universum in Wahrheitswerte mit Werten, welche Funktionen vom Universum in die Menge der Wahrheitswerte sind. Dahinter steckt eine gewisse Systematik. Zunächst einmal ist alles das, was keine Funktion ist, entweder ein Wahrheitswert oder ein Ding. Diese beiden muß man streng auseinanderhalten. Wir verabreden, folgende sogenannte **Typen** einzuführen: t und e. t is der **Typ** 'Wahrheitswert', e der **Typ** 'Ding'. Dies ist nur eine Bezeichnungsweise. Jedoch wollen wir in Bezug auf ein gegebenes Universum V sagen, das jedes Element von V den Typ e hat, und daß 0 und 1 den Typ t. V *ist* damit die Menge der Objekte vom Typ e, und 2 die Menge der Objekte vom Typ t. Wir wollen nun jeder Bedeutung eines Wortes einen Typ zuordnen, nicht nur den Eigennamen. Dazu müssen wir eine Vereinbahrung finden, welchen Typ Funktionen haben sollen. Sind M und N Mengen, so verabreden wir,

Tabelle 1: Semantische Typen

Wortklasse	Semantischer Typ
Eigenname	e
Intransitives Verb	$e \to t$
Transitives Verb	$e \to (e \to t)$

die Menge aller Funktionen von M nach N mit $M \to N$ zu bezeichnen. Zum Beispiel ist $V \to 2$ dann die Menge aller Funktionen von V in die Menge der Wahrheitswerte. Wir sagen nun gleichzeitig, daß eine Funktion von V nach 2 ein Objekt vom Typ $e \to t$ sei, da jedes $x \in V$ den Typ e und jedes $y \in 2$ den Typ t. $V \to 2$ ist nun die Menge aller Objekte vom Typ $e \to t$. Die Bedeutung eines intransitiven Verbs ist also eine Funktion vom Typ $e \to t$. Wir sagen daher auch, ein intransitives Verb habe den **semantischen Typ** $e \to t$. Damit haben wir einen Typ für intransitive Verben. Wir wissen nun schon, daß transitive Verben Funktionen sind, welche auf ein Objekt angewendet eine Funktion vom Typ $e \to t$ liefert. Also ist jene eine Funktion vom Typ $e \to (e \to t)$. Auf diese Weise werden den Worten der Sprache semantische Typen zugeordnet, welche Auskunft darüber geben, welchen Typ ihre Bedeutung hat (was immer sie konkret sei). In Tabelle 1 sind ein paar Typen aufgelistet. Offensichtlich kann man diese Spiel fortsetzen. Wir können zum Beispiel den Typ $e \to (e \to (e \to t))$ schaffen (zB für ditransitive Verben wie geben), aber auch $t \to t$, $(e \to t) \to (e \to t)$, $t \to (t \to t)$ und vieles mehr. Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt. Wann immer nun α und β Typen sind, so ist auch $\alpha \to \beta$ ein Typ. Die Typen e und t wollen wir **Basistypen** nennen. Dies werden nicht die einzigen Basistypen sein, aber für den Moment genügen sie. Ferner: ist f ein Objekt vom Typ $\alpha \to \beta$, und x ein Objekt vom Typ α, so läßt sich nach Definition f auf x anwenden, und $f(x)$ ist ein Objekt vom Typ β. Wir führen die Notation $x : \alpha$ ein, um zu dokumentieren, daß x ein Objekt vom Typ α ist. Wir haben also folgende Regel:

$$\frac{f : \alpha \to \beta \qquad x : \alpha}{f(x) : \beta}$$

Diese Notation erscheint auf den ersten Blick nichts Neues zu bringen. Jedoch ergibt sich beim näheren Hinsehen Erstaunliches. Das Faktum, daß ein intransitives Verb nur ein Argument hat (das Subjekt), folgt schon aus der Tatsache, daß es den semantischen Typ $e \to t$ hat! Es kann aus rein semantischen Gründen gar nicht anders, als ein und nur ein Argument zu nehmen. Das einzige, was die Syntax festlegt, ist, ob dieses Argument links von dem Verb oder rechts von ihm steht. Die Grundlage für dieses Argument ist das folgende Prinzip:

> **Standardregel I.** Es seien A und B Konstituenten der Sprache L. Die Konstituente $[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]$ hat genau dann den semantischen Typ α, falls ein β existiert derart, daß gilt: (i) A hat den Typ $\beta \to \alpha$ und B den Typ β oder (ii) B hat den Typ $\beta \to \alpha$ und A den Typ β. Im Fall (i) ist $[[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]]^{\mathfrak{M}} = [\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}([\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}})$ und im Fall (ii) ist $[[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]] = [\mathsf{B}]^{\mathfrak{m}}([\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}})$.

Das heißt, rein semantisch gesehen gibt es alle Konstituenten, welchen wir einen Typ zuordnen können. Nach unserer Definition gilt nun folgendes.

Definition 4.1 *Eine Konstituente ist eine* ***Aussage****, falls sie den Typ t hat.*

Dazu ein Beispiel. Wir geben unserem Wort nicht den Typ $t \to t$, sowie den Worten und und oder den Typ $t \to (t \to t)$. Denn $-$, welches die Bedeutung von nicht ist, ist ja tatsächlich eine Funktion von der Menge der Wahrheitswerten in die Menge der Wahrheitswerte. Mit und tun wir uns etwas schwerer. $\cap$, welches die wir als die Bedeutung von und ansetzen würden, ist zwar eigentlich eine Funktion von Paaren von Wahrheitswerten in Wahrheitswerte. Aber aus denselben Gründen, wie wir sie im letzten Abschnitt angebracht haben, wollen wir die Definition von $\cap$ nun dahingehend ändern, daß sie jetzt eine Funktion vom Typ $t \to (t \to t)$ ist. Dies ist nicht schwer zu tun. Wir sagen, daß $\cap$ eine Funktion ist, welche auf 0 bzw 1 angewendet eine Funktion von t nach t liefert. Diese sind $\cap(0) : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0$ und $\cap(1) : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$. Analoges gilt für oder und $\cup$. Ist dies getan, so wollen wir sehen, ob dies vernünftige Ergebnisse liefert.

Wir gehen zurück auf unser Modell $\mathfrak{M}$. Betrachten wir folgende Sätze

(4.1) Paul schläft und Sophie rennt.
(4.2) Sophie rennt oder Paul schläft.

Um zu sehen, ob (4.1) semantisch wohlgeformt ist, müssen wir schauen, ob es eine Konstituentenanalyse gibt, derart, daß sich am Ende der Typ t ergibt. Diese existiert. Wir schreiben hier $\mathsf{A} : \alpha$, falls A eine Konstituente von Typ

α bildet.

$$\dfrac{\dfrac{\textsf{Paul} : e \quad \textsf{schläft} : e \to t}{\textsf{Paul schläft} : t} \qquad \dfrac{\textsf{und} : t \to (t \to t) \quad \dfrac{\textsf{Sophie} : e \quad \textsf{rennt} : e \to t}{\textsf{Sophie rennt} : t}}{\textsf{und Sophie rennt} : t \to t}}{\textsf{Paul schläft und Sophie rennt} : t}$$

Man sieht schon: das Überprüfen des Typs ist eine rein mechanische Angelegenheit. Wir haben also einen Satz vor uns, und sein Wahrheitswert läßt sich jetzt ermitteln. Dazu müssen wir die Funktion $J(\textsf{schläft})$ auf $J(\textsf{Paul})$ anwenden. Dies ergibt 1. Dann wenden wir $J(\textsf{rennt})$ auf $J(\textsf{Sophie})$ an und erhalten 0. Anschließend wenden wir $J(\textsf{und}) = \cap$ auf 0 an und erhalten die Funktion $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0$. Angewendet auf das Ergebnis vorhin erhalten wir also 0, wie gewünscht.

Wir fügen nun das fehlende Stück Syntax hinzu. Bis jetzt sind Äußerungen wie (4.3) und (4.4) semantisch gesehen wohlgeformt.

(4.3) Schläft Paul und Sophie rennt.
(4.4) Oder rennt Sophie Paul schläft.

Es kommt ja schließlich nicht auf die Reihenfolge an. Wir führen deswegen obendrein *syntaktische Typen* ein, welche wir kurz *Kategorien* nennen wollen. (Manchmal nennen wir sie auch, etwas pleonastisch, *syntaktische Kategorien.*)

Definition 4.2 *Ist T ein Basistyp, so ist T eine* ***Kategorie****. Sind α und β Kategorien, so auch α/β und $\beta\backslash\alpha$.*

Jeder Kategorie ordnen wir einen semantischen Typ zu. Dies tun wir mittels einer Abbildung σ, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{array}{lcll}
\sigma(\alpha) & := & \alpha & \text{falls } \alpha \text{ Basistyp} \\
\sigma(\alpha/\beta) & := & \sigma(\beta) \to \sigma(\alpha) & \\
\sigma(\beta\backslash\alpha) & := & \sigma(\beta) \to \sigma(\alpha) &
\end{array}$$

Wir nennen eine Konstituente vom Typ α/β oder $\beta\backslash\alpha$ einen **Funktor**. Dieser Funktor nimmt ein sogenanntes **Argument** vom Typ β. Es ergibt sich dann eine Konstituente vom Typ α. Ein Beispiel. Intransitiven Verben wollen wir den Typ $e\backslash t$ geben. Dies bedeutet: findet das Verb sein Argument (= Subjekt) auf der linken Seite, so ist die Konstituente wohlgeformt und hat die Kategorie t. Die Bedeutung rechnen wir wie vorher aus. Transitive Verben

Tabelle 2: Syntaktische Kategorien

Wortklasse	Kategorie	Semantischer Typ
Eigenname	e	e
Intransitives Verb	$e\backslash t$	$e \to t$
Transitives Verb	$(e\backslash t)/e$	$e \to (e \to t)$
Koordinator	$(t\backslash t)/t$	$t \to (t \to t)$

erhalten die Kategorie $(e\backslash t)/e$. Denn zunächst suchen sie ihr Objekt, und zwar auf der rechten Seite. Das Ergebnis ist eine Konstituente der Kategorie des intransitiven Verbs. Insgesamt erhalten wir die in Tabelle 2 aufgelistete Kategorien. Hierbei seien und und oder Koordinatoren. Die Regeln für das Zusammensetzen von Konstituenten sind wie folgt.

> **Standardregel II.** Es seien A und B Konstituenten der Sprache L. Die Konstituente $\mathsf{A}^\frown\mathsf{B}$ hat genau dann die Kategorie α, falls ein β existiert derart, daß gilt: (i) A hat die Kategorie α/β und B die Kategorie β oder (ii) B hat die Kategorie $\beta\backslash\alpha$ und A die Kategorie β. Im Fall (i) ist $[\mathsf{A}^\frown\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}} = [\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}([\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}})$ und im Fall (ii) ist $[\mathsf{B}^\frown\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}} = [\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}([\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}})$.

Wir haben jetzt praktisch eine Grammatik der Sprache geschrieben, bei der die Semantik die Konstituentenanalyse treibt und die Syntax lediglich angibt, ob das Argument links oder rechts zu schreiben ist. Damit kommt man sehr weit. Allerdings verkompliziert sich der Apparat zunehmend. Wir bemerken hier zwei Dinge, die nicht in diesen Rahmen passen. Erstens ist das Verb im Nebensatz nicht in an zweiter Stelle, sondern an letzter Stelle. Man muß also ein gewisses Maß an Flexibilität in Bezug auf die Wortstellung haben. Es ist allerdings so, daß die Wortstellung im Deutschen insgesamt so frei ist, daß man Mühe hat, dem mit den Kategorien wie oben definiert Rechnung zu tragen. Ein anderes Faktum betrifft unpersönliche Verben, dh solche, die eigentlich gar kein Argument benötigen.

(4.5) Es regnet.

(4.6) Es wird getanzt.

Das Wörtchen es liefert hier gar keinen Beitrag zur Bedeutung, es ist lediglich da, weil man im Deutschen ein overtes Subjekt benötigt. Im Lateinischen ist dies zB nicht nötig. Nun hat also das Wort regnet semantisch gesehen den Typ t, weil es eben regnet oder nicht. Syntaktisch sollte es also auch den Typ t haben, also sollte (4.7) grammatisch sein. Das ist nicht der Fall.

(4.7) * Regnet.

Wie man sieht, geht die Syntax also durchaus eigene Wege.

Übungen

Übung 16. Überprüfen Sie in der Tabelle 2, daß die semantischen Typen tatsächlich den angegebenen Kategorien entsprechen.

Übung 17. Berechnen Sie die Bedeutung in dem Funktionalen Modell $\mathfrak{M}$ von

(4.8) Paul ärgert Sophie.
(4.9) Paul schläft oder Sophie ärgert Paul.

Übung 18. Es sei nicht nicht in unserer Sprache. Wir führen jetzt ein neues Wort namens nicht ein. Es habe die Kategorie $(e\backslash t)\backslash(e\backslash t)$. Dies bedeutet, daß es intransitive Verben in intransitive Verben überführt. Die Bedeutung von nicht sei

$$[\mathsf{nicht}]^{\mathfrak{M}} : M \mapsto V - M$$

Das heißt, ist $[\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}$ eine Menge, so ist $[\mathsf{nicht\ A}]^{\mathfrak{M}}$ deren Komplement in V. Prüfen Sie zunächst, ob folgende Sätze grammatisch sind.

(4.10) Paul schläft nicht.
(4.11) Sophie ärgert Paul nicht.
(4.12) Sophie ärgert nicht Paul.

Übung 19. Berechnen Sie den Typ von nicht aus der vorigen Übung und ermitteln Sie die Bedeutung von rennt nicht und ärgert Paul nicht in $\mathfrak{M}$ aus dem vorigen Abschnitt.

Übung 20. Nehmen wir an, Sie wollen auch den Worten und und oder eine Kategorie geben, wobei diese jetzt intransitive Verben miteinander verknüpfen sollen, etwa rennt und schläft. Geben Sie die Kategorie dieser Worte an. (Die Semantik liegt ja schon fest.)

5 Gruppen und der Plural

In den nun folgenden Abschnitten wollen wir uns mir dem Plural und der Nominalphrase beschäftigen. Dabei kommt es zwangsläufig dazu, daß wir eine Semantik für den Plural als eigenständiges Morphem entwickeln. Wir treffen nun folgende Vereinbahrung. Jedes Wort besitzt einen sogenannten *Stamm*, aus dem seine jeweiligen Wortformen durch Anhängen von Morphemen gebildet werden. Da der Stamm oft homophon mit einer konkreten Form ist, bezeichnen wir ihn mit einem hochgestellten $^\spadesuit$. Morpheme, die keine selbständigen Einheiten sind, werden durch Kapitälchen bezeichnet, also etwa $\textsc{sg}$ für Singular und $\textsc{pl}$ für Plural. Es ist aufgrund dieser Vereinbahrung

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{Maus} & = & \mathsf{Maus}^\spadesuit{}^\frown\textsc{sg} \\ \mathsf{Mäuse} & = & \mathsf{Maus}^\spadesuit{}^\frown\textsc{pl} \end{array}$$

Kasus bleibt momentan aus dem Spiel (und wird dementsprechend auch nicht notiert). Dieselbe Vereinbahrung gilt für Verben. Bis auf weiteres sind Verbformen immer 3. Person, Präsens, Indikativ, Aktiv. Also ist

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{rennt} & = & \mathsf{renn}^\spadesuit{}^\frown\textsc{sg} \\ \mathsf{rennen} & = & \mathsf{renn}^\spadesuit{}^\frown\textsc{pl} \end{array}$$

Es wird sich herausstellen, daß die Semantik der Verben von dem Numerus unabhängig ist. Der Numerus am Verb wird für die in diesem Kapitel betrachteten Sätze nämlich nach folgenden Regeln bestimmt:

1. Ist das Subjekt von der Form A und B, so steht das Verb im Plural.
2. Ist das Subjekt von der Form A oder B, so steht das Verb genau dann im Plural, wenn A oder B im Plural stehen.
3. Ist das Subjekt C nicht von der Form A und B, oder A oder B, so ist der Numerus des Verbs gleich dem Numerus von C.

Betrachten wir nun die Sätze (5.1) und (5.2).

(5.1) Paul und Sophie schlafen.
(5.2) Paul oder Sophie schläft.

Offensichtlich können von (5.1) sowohl auf (5.3) als auch auf (5.4) schließen.

(5.3) Paul schläft.
(5.4) Sophie schläft.

Ebenso ist (5.1) wahr, wenn sowohl (5.3) als auch (5.4) wahr sind. Die Situation ist also analog wie bei (5.2). Falls (5.2) wahr ist, so ist (5.3) oder (5.4) wahr, und falls (5.3) oder (5.4) wahr ist, so ist schon (5.2) wahr. Also ist (5.1) äquivalent mit (5.5) und (5.2) äquivalent mit (5.6).

(5.5) Paul schläft und Sophie schläft.
(5.6) Paul schläft oder Sophie schläft.

Es scheint also, als unterscheide sich (5.1) von (5.2) lediglich dadurch, daß das eine Mal und und das andere Mal oder steht. Das bedeutet: wir haben hier augenscheinlich eine neue Form der Koordination, nämlich der Koordination von Eigennamen. Dies bringt uns aber in eine Schwierigkeit. Falls wir Paul und Sophie bzw Paul oder Sophie auch als Eigennamen analysieren wollen, so haben und und oder den semantischen Typ $e \to (e \to e)$. Das ist allerdings äußerst problematisch. Wir lassen das Problem jedoch vorerst beiseite. Betrachten wir nochmals (5.1). Es fällt auf, daß wir hier den Plural setzen müssen und nicht den Singular. Intuitiv bedeutet der Plural, daß das Subjekt aus mehreren Dingen (in diesem Fall Personen) besteht. Das heißt, wir wollen (5.1) nicht einfach als Abkürzung von (5.5) verstehen, sondern wir wollen, daß in (5.1) das Subjekt aus Sophie *und* Paul besteht. Der einfachste Weg ist es, die beiden in eine Menge zu tun. Das Subjekt von (5.1) ist also die Menge $\{\mathsf{Paul}, \mathsf{Sophie}\}$. Solcherart Mengen wollen wir **Gruppen** nennen. Der Unterschied zwischen einer Gruppe und einer Menge ist hier lediglich aspektuell. Denn die Menge $\{\mathsf{Paul}, \mathsf{Sophie}\}$ ist ja auch ein Gegenstand, kann also bei anderer Gelegenheit ein Einzelding sein. Etwa mag man eine Schulklasse einfach als die Menge seiner Schüler auffassen. Dann ist die Schulklasse schlicht ein Einzelding, obwohl sie aus mehreren Schülern besteht. Deswegen steht in (5.7) der Singular und (5.8) der Plural, obwohl wir mit beiden Sätzen so ziemlich das gleiche sagen.

(5.7) Die Klasse 6a benahm sich schlecht.
(5.8) Die Schüler der 6a benahmen sich schlecht.

Ob also eine Menge eine Gruppe ist oder nicht, hängt vom jeweiligen Satz ab. Wir wollen dies jedoch nicht vertiefen.

Kommen wir erneut auf (5.1) zurück. Falls also (5.1) nichts anderes bedeutet als (5.5), warum brauchen wir dann Gruppen? Die Antwort ist recht einfach. Es gibt nämlich Verben, die immer Gruppen als Subjekte brauchen.

(5.9) Paul und Sophie trafen sich.
(5.10) *Paul traf sich.
(5.11) *Sophie traf sich.
(5.12) Die Soldaten verteilten sich auf die Stellungen.
(5.13) *Der Soldat verteilte sich auf die Stellungen.

Offensichtlich macht es keinen Sinn, von einer einzelnen Person zu sagen, sie habe sich getroffen. Man kann sich nur mit jemand anderes treffen. Ebenso kann eine einzelne Person sich nicht verteilen. Es ist also (5.9) nicht einfach die Konjunktion von (5.10) und (5.11), sondern die Gruppe, bestehend aus Paul und Sophie handelt in einem Sinne irreduzibel. Wir sagen nun, ein Verb V sei **distributiv**, falls die folgenden Schlüsse berechtigt sind:

$$\frac{\textsf{A und B V-en.}}{\textsf{A V-t.}} \qquad \frac{\textsf{A V-t.} \qquad \textsf{B V-t.}}{\textsf{A und B V-en.}}$$

Es ist also schlafen distributiv, sich treffen aber nicht. Wie kann man dieser Lage nun mit Hilfe von Typen Herr werden? Ein erster Ansatz ist wie folgt. Wir nehmen an, es gibt einen neuen Basistyp, den der **Gruppe**. Wir haben oben gesagt, daß Gruppen Mengen von Dingen sind. Also wollen wir sagen, **Gruppen** sind Teilmengen von V, also Elemente von $\wp(V)$. Nun gibt es einige Schwierigkeiten. Zum einen ist die Klasse 6a eine Gruppe, dh eine Menge (nämlich die Menge ihrer Schüler), zum anderen ist sie ein Einzelding. Wir haben oben gesagt, daß die Tatsache, ob etwas eine Gruppe ist, aspektuell ist. Wir tun also Folgendes. Wir führen ein Symbol $^\bullet$ ein und schlagen vor, daß mit jedem Typ α auch $\alpha^\bullet$ ein Typ sei. Objekte des Typs $\alpha^\bullet$ sind stets *Mengen* von Objekten, welche ihrerseits den Typ α haben. Ist also e der Typ der Dinge, so ist $e^\bullet$ der Typ aller Mengen, $e^{\bullet\bullet}$ der Typ aller Mengen von Mengen, und so weiter. Unser Universum V ist jetzt wie folgt strukturiert. Es gibt auf der einen Seite eine Basismenge U aus sogenannten **Urelementen**. Diese sind keine Mengen und enthalten demnach keine Elemente. Das Extensionalitätsprinzip gilt also nicht für Urelemente, weil sie keine Mengen sind. Ist x eine Urelement, so gibt es kein y mit $y \in x$. Sehr wohl aber gibt es y mit $x \in y$. Aus der Menge U schaffen wir nun Gruppen wie folgt: $\wp(U)$ ist die Menge der Gruppen, $\wp\wp(U)$ die Menge der Gruppen von Gruppen, usw. V ist nun die Menge, welche alle diese Gruppen enthält. V ist also immer unendlich groß. Der Begriff des Urelements ist technischer Natur. Ein Mitglied von V bezeichnen wir oft auch als **Ding** oder, falls wir seine Einheit betonen wollen, als **Einzelding**. [1]

Wir haben schon oben bemerkt, daß die Semantik des Verbs nicht zwischen Singular und Plural unterscheidet. Das sieht man zB bei (5.7) und (5.8). Wir müssen aber nun dazu Stellung nehmen, was passiert, wenn Subjekte nicht nur Urelemente sondern auch Gruppen sein können, sogar Gruppen von Gruppen etc. Obwohl mengentheoretisch gesehen der Schichtung von Mengen keine Grenzen gesetzt sind, bricht die sprachliche Feingliederung bei Gruppen von Gruppen ab. Kompliziertere Objekte werden uns also nicht begegnen. Im allgemeinen Fall ist hier nichts zu machen. Man muß einfach annehmen, die Bedeutung des Verbs, etwa f, sei eben auf allen Dingen erklärt, eben auch auf Gruppen. (Dies schließt auch den Fall ein, daß die Funktion f auf gewissen Elementen undefiniert ist.) Dies charakterisiert nun zunächst mal die Bedeutung des Verbs im Singular. Diese muß von vornherein gegeben sein. Was machen wir nun im Plural? Für distributive Verben kann man die Bedeutung auf eine andere Funktion reduzieren. Ist G eine Gruppe (zB $\{\mathsf{Paul}, \mathsf{Sophie}\}$) und $f : V \to 2$ die Bedeutung eines distributiven Verbs, zum Beispiel schlafen (also: 3. Person, Plural, Präsens, Indikativ, Aktiv), dann wollen wir eine Funktion $f^\delta : (V - U) \to 2$ definieren durch

$$f^\delta(X) := \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x) = 1 \text{ für alle } x \in X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f^δ hat den Typ $e^\bullet \to t$. Wir sagen nun, f sei **distributiv**, falls es ein g gibt derart, daß $f(X) = g^\delta(X)$ für alle Gruppen X. Ein Verb ist also genau dann distributiv, falls seine Bedeutung in jedem funktionalen Modell eine distributive Funktion ist. Man beachte, daß wir jetzt zunächst einmal einen Unterschied haben zwischen (5.7) und (5.8).

(5.7) Die Klasse 6a benahm sich schlecht.
(5.8) Die Schüler der 6a benahmen sich schlecht.

Ist allerdings sich schlecht benehmen distributiv, so bedeuten jetzt (5.7) und (5.8) tatsächlich dasselbe, obwohl das Verb einmal im Singular und das andere Mal im Plural steht. Es kann also der Fall eintreten, daß ein Verb im Plural distributiv ist aber im Singular nicht. Wir behaupten, daß dies tatsächlich in dem hier vorliegenden Beispiel der Fall ist. In (5.7) wird die Klasse als Einheit gesehen, und somit insgesamt für ihr Verhalten verantwortlich gemacht,

[1] Ein Schulklasse, insofern sie Menge von Schülern ist, ist daher kein Urelement. Trotzdem kann sie als Einzelding fungieren.

welches in etwa das durchschnittliche Verhalten der Schüler ist. Dies schließt nicht aus, daß einige Schüler besonders anständig waren, wenn nur genügend andere Schüler sich unanständig verhalten haben. In (5.8) steht aber eine versteckte Allaussage. Hier wird schlicht von jedem Schüler behauptet, daß er sich schlecht benommen hat. [2]

Wir bemerken hier, daß es noch einen strengeren Begriff von Distributivität gibt, nämlich wenn für alle Gruppen X gilt: $f(X) = f^{\delta}(X)$. In diesem Fall respektiert f die Schichtung von X überhaupt nicht, sondern sieht nur auf die Urelemente, welche letztlich in X auftreten. Wir nennen dies eine total distributive Funktion. Das Verb rennen ist total distributiv. Wir werden unten Verben begegnen, die einfach distributiv sind, ohne total distributiv zu sein.

Für das Prädikat $\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}$ setzen wir also die folgende Bedeutung in $\mathfrak{M}$ an (wir zeigen nur einen Ausschnitt):

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\varnothing & \mapsto & 1 & \{x_1, x_2\} & \mapsto & 1 \\
\{x_1\} & \mapsto & 1 & \{x_1, x_3\} & \mapsto & 0 \\
\{x_2\} & \mapsto & 1 & \{x_1, x_4\} & \mapsto & 0 \\
\{x_3\} & \mapsto & 0 & \{x_1, x_5\} & \mapsto & 1 \\
\{x_4\} & \mapsto & 0 & \{x_2, x_3\} & \mapsto & 0 \\
\{x_5\} & \mapsto & 1 & \{x_3, x_4\} & \mapsto & 0
\end{array}$$

Dies ist die Funktion, welche wir mit $[\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}$ bezeichnen. Dann ist also (5.1) falsch, weil $([\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}})^{\delta}$ auf die Gruppe $\{x_1, x_3\}$ nicht zutrifft, dh $([\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}})^{\delta}(\{x_1, x_3\}) = 0$, da ja $[\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}(x_3) = 0$. Nun setzen wir

$$\begin{array}{lcl}
[\mathsf{schlafen}]^{\mathfrak{M}} & := & [\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}} \\
[\mathsf{schläft}]^{\mathfrak{M}} & := & [\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}
\end{array}$$

Ganz allgemein ist also SG und PL jedenfalls am Verb semantisch inaktiv, dh die identische Funktion.

Man mag jetzt einwenden, daß der Plural anzeigt, daß es sich um eine Vielheit handelt, die Gruppe also mindestens 2 Elemente haben muß. Dann

[2] Wir merken gleich an, daß Allaussagen oft auch nicht so streng genommen werden. Wenn wir etwa sagen, daß alle Politiker korrupt sind, so wollen wir dies eigentlich nicht auf jeden Fall angewendet wissen. Insofern wird auch (5.8) nicht wirklich wie eine Allaussage behandelt. Dies entkräftet nicht unsere Behauptung, daß es sich dabei wirklich um eine Allaussage handelt. Wir meinen außerdem, daß (5.8) stärker ist als (5.7).

sind also $\varnothing$ und die Einermengen keine Gruppen. Dies ist jedoch nicht unbedingt zwingend. Nehmen wir an, ich besuche ein Wettrennen und frage meinen Nachbahrn:

(5.14) Wer sind denn die Favoriten?

Dann rede ich offensichtlich über eine Gruppe. Falls mir nicht bekannt ist, wie viele Favoriten es gibt, gebrauche ich den Plural. Hätte ich dagegen (5.15) verwendet, so hätte ich signalisiert, daß ich davon ausgehe, daß es nur einen Favoriten gibt.

(5.15) Wer ist denn der Favorit?

Man bedenke: (5.14) ist auch dann nicht unzulässig, wenn ich weiß, daß es nur einen Favoriten gibt! (5.14) ist also neutral in Bezug auf die Frage, wie viele Favoriten es gibt. Ferner, ist der Gebrauch des Singulars anstelle des Plurals in (5.16) unzulässig.

(5.16) Runde Quadrate gibt es nicht.

Man sieht also aus diesen Beispielen, daß es gute Gründe gibt, sowohl die leere Menge als auch die Einermengen als Gruppen zuzulassen und weiterhin Verben im Plural als Eigenschaften von Gruppen zu interpretieren.

Kommen wir auf den Unterschied zwischen distributiven und nichtdistributiven Verben zurück. Einige Verben verhalten sich in Bezug auf diese Unterscheidung unterschiedlich.

(5.17) Paul und Sophie trafen sich.
(5.18) Paul traf sich mit Sophie.
(5.19) Sophie traf sich mit Paul.

Die Sätze (5.17) – (5.19) bedeuten ungefähr dasselbe (die Unterschiede sind nicht leicht zu fassen und für unsere Zwecke vernachlässigbar). Der Satz (5.20) kann nun auf zwei Weisen verstanden werden: nämlich distributiv oder nicht distributiv.

(5.20) Paul und Anne trafen sich mit Sophie.
(5.21) Paul, Anne und Sophie trafen sich.

Ist (5.20) distributiv, so traf sich Sophie sowohl mit Paul als auch mit Anne. Ist es nicht distributiv, so traf sich Sophie einmal mit der Gruppe bestehend aus Paul und Anne. Nur in dem letzten Sinn ist (5.20) gleichbedeutend mit (5.21).

Besonders klar sehen kann man bei dem Verb heiraten. Im Normalfall heiraten sich zwei Personen. Also ist jedesmal, wenn jemand heiratet, eine andere Person im Spiel. Es ist aber (5.22) zweideutig.

(5.22) Paul und Anne heiraten.

Das eine Mal heiraten Paul und Anne einander und das andere Mal heiratet Paul eine Person, und Anne eine andere. Im letzten Sinne ist das Verb distributiv bezüglich seines Subjekts. Nun betrachte man

(5.23) Paul und Anne und Sophie und Stefan heiraten.

In (5.23) ist das Verb notwendig distributiv. Wir haben allerdings die Wahl zwischen einer Interpretation, in welcher jeweils Paul und Anne einander heiraten sowie Sophie und Stefan und einer Interpretation, in welcher alle vier eine jeweils andere Person heiraten. Wenn man die erste Interpretation haben will, muß man annehmen, daß wir eine Gruppe der folgenden Form haben:

$$\{\{\mathsf{Paul}, \mathsf{Anne}\}, \{\mathsf{Sophie}, \mathsf{Stefan}\}\}$$

Diese Gruppe besteht aus Paaren, welche jeweils einander heiraten. Das Verb ist also distributiv. Aber die Elemente der Gruppe sind Paare, nicht Einzeldinge. Dies ist nicht vorgesehen. Wir müssen also annehmen, daß das Verb heiraten im intransitiven Gebrauch zwei Bedeutungen hat: (1) es bedeutet in der Form X heiratet, wo X eine einzelne Person ist, daß X jemanden heiratet (der nicht genannt ist), (2) es bedeutet in der Form X und Y heiraten, daß die beiden *einander* heiraten. In der Form (1) können wir sowohl Singular wie auch den Plural gebrauchen. Auf diese Weise wird (5.22) zweideutig. Was nun machen mit (5.23)? Wir nehmen an, daß und nicht nur Gruppen schaffen kann (Paul und Anne), sondern auch Gruppen vereinen kann, etwa in

(5.24) Die Schmidts und die Fischers haben uns eingeladen.

Damit wird also und zweideutig. Einmal schafft es eine Zweiergruppe aus seinen Konjunkten, das andere Mal schafft es eine Vierergruppe, welche beide Gruppen vereinigt. Die Gruppe, von welcher in (5.23) die Rede ist, kann also nicht nur eine Zweiermenge von Paaren sein, sondern auch die vierelementige Gruppe

$$\{\mathsf{Paul}, \mathsf{Sophie}, \mathsf{Anne}, \mathsf{Stefan}\} .$$

Im letzten Fall ist (5.23) also notwendig in der Bedeutung (1) gebraucht und distributiv. Ist die Gruppe eine Zweiermenge von Paaren, so ist heiraten im Sinne (2) gebraucht, und auch distributiv. Aber wir bekommen exakt die

Bedeutungen, die wir brauchen. Man beachte, daß heiraten auch transitiv gebraucht werden kann, und in diesem Fall ist es notwendig distributiv. Deswegen macht (5.25) recht wenig Sinn.

(5.25) ? Paul und Anne heiraten Sophie.

Man sieht, zusätzlich zu Gruppen, welche Teilmengen von U sind, gibt es auch Gruppen, welche Mengen von Teilmengen von U sind, also Elemente von $\wp(\wp(U))$. Wir nennen sie Gruppen vom Niveau 2. Solchen Objekten werden wir noch später begegnen. Dies kann man beliebig weitertreiben. Dies rechtfertigt im Nachhinein die Tatsache, daß wir Objekte von Typ $e^{\bullet\bullet}$, $e^{\bullet\bullet\bullet}$ und so weiter zugelassen haben. In jedem Fall ist ein Verb im Plural distributiv nur in dem Sinne, daß es auf eine Gruppe vom Niveau 2 zutrifft falls es auf alle Elemente zutrifft, welche jetzt Gruppen vom Niveau 1 sind. Dies läßt sich nicht ohne weiteres wiederholen. Wir wollen darauf jedoch nicht eingehen. Ob nun eine Menge sich wie ein Einzelding verhält oder wie eine Gruppe, das bestimmt das Verb.

Wir rekapitulieren. Das Wort und, insofern es auf Dingen agiert, hat zwei Möglichkeiten. Es gibt das *erhöhende* ($\widehat{\oplus}$) und das *fusionierende* ($\oplus$) und. Diese sind auf Mengen definiert wie folgt:

$$X \oplus Y := X \cup Y, \qquad X \widehat{\oplus} Y := \{X, Y\}$$

Diese Definition sind nur für Gruppen getroffen worden. Jedoch soll $\widehat{\oplus}$ ganz allgemein wie oben definiert sein, auch wenn X oder Y ein Urelement ist. Für $\oplus$ soll gelten: ist X ein Urelement, so wird X stillschweigend durch die Einermenge $\{X\}$ ersetzt. Wir bekommen also:

$$[\textsf{Paul und Sophie}]^{\mathfrak{M}} = \{x_1\} \oplus \{x_3\} = \{x_1, x_3\}$$

oder, alternativ dazu,

$$[\textsf{Paul und Sophie}]^{\mathfrak{M}} = x_1 \widehat{\oplus} x_3 = \{x_1, x_3\}$$

Übungen

Übung 21. Geben Sie Kontexte an, in denen man nicht einfach die Klasse 6a gegen die Schüler der Klasse 6a austauschen kann, auch wenn man evtl. Singular und Plural austauscht.

ÜBUNG 22. Geben Sie verschiedene Szenarien an, unter denen der folgende Satz gültig ist und zeigen Sie damit, daß auch sich treffen distributiv sein kann.

(5.26) Die Schmidts und die Fischers haben sich am Wochenende getroffen.

ÜBUNG 23. Wie viele verschiedene Bedeutungen hat der folgende Satz gemäß der in diesem Abschnitt entwickelten Semantik?

(5.27) Anne und Paul und Sophie heiraten.

Überlegen Sie, ob die Ergebnisse plausibel sind.

ÜBUNG 24. Geben Sie sämtliche Gruppen an, die dem folgenden Ausdruck gemäß der in diesem Kapitel entwickelten Semantik für und entsprechen:

(5.28) Anne und Paul und Sophie und Isabel

ÜBUNG 25. Ein transitives Verb ist distributiv bzgl ihres Objekts, falls folgende Schlüsse gültig sind:

$$\frac{\text{A V-t B und C.}}{\text{A V-t B.}} \qquad \frac{\text{A V-t B.} \qquad \text{A V-t C.}}{\text{A V-t B und C.}}$$

Testen Sie, ob die folgenden Verben distributiv bzgl ihres Objekt sind: sehen, verknoten, verändern, rennen, vermischen.

6 Die Nominalgruppe I

Nomina sind Haus, Stuhl, Demokratie, usw. Ein Nomen bezeichnet in normalen Diskurs einen Gegenstand. Wenn man zum Beispiel das Wort Stuhl äußert, etwa in (6.1), so bezeichnet dieses Wort offensichtlich einen bestimmten Gegenstand.

(6.1) Paul schläft auf dem Stuhl.

Allerdings kann ich das Wort Stuhl nicht dazu gebrauchen, um schlichtweg jeden Gegenstand zu bezeichnen, sondern eben nur Stühle. Ferner beachte man, daß der definite Artikel dem gesetzt wurde. Es ist nicht möglich, ihn ersatzlos zu streichen. Auf seinen Beitrag kommen wir noch zu sprechen. Andererseits kann das Wort Stuhl durchaus auch viele Gegenstände bezeichnen:

(6.2) Ein Stuhl ist normalerweise aus Holz.

In (6.2) bezeichnet Stuhl offensichtlich alle (oder zumindest einen großen Teil aller) Stühle. Wir sagen deshalb, daß die Bedeutung des Ausdrucks Stuhl schlicht die Menge aller Stühle sei, und wenn ich der Stuhl sage, meine ich einen bestimmten Gegenstand aus dieser Menge.

Der semantische Typ eines Nomens ist also (funktional gesehen) $e \to t$. Wie üblich haben wir nämlich anstelle der Menge M der Gegenstände, welche ein Nomen bezeichnet, ihre charakteristische Funktion als Bedeutung eingesetzt. Dies bringt uns automatisch in eine gewisse Verlegenheit. Denn intransitive Verben haben ja auch den semantischen Typ $e \to t$. Wir haben also zwei Wortklassen mit verschiedener Syntax, welche denselben semantischen Typ haben. Dies ist zunächst mal kein Widerspruch, führt aber zu Komplikationen bei der Bestimmung der syntaktischen Kategorie. Wir werden deshalb auch nachher einen anderen Weg gehen. Es bezeichnet also Stuhl die (charakteristische Funktion der) Menge aller Stühle. Was nun wäre die Kategorie von Stuhl? Hier haben wir die Wahl zwischen t/e und $e\backslash t$. Es gibt keinen vernünftigen Grund, eine Kategorie der anderen vorzuziehen, denn Nomina kann man nicht mit Eigennamen kombinieren. Denn es sind zum Beispiel (6.3) und (6.4) ungrammatisch.

(6.3) Paul Stuhl.
(6.4) Stuhl Paul.

Montague hat ein solches Problem an einer Stelle so gelöst, daß er schlicht ein neues Symbol, sagen wir //, anstellen von / eingesetzt hat. Nomina wären dann von der Kategorie $t//e$. Dies erlaubt, Nomina und Verben zu differenzieren, und möglicherweise auch (6.3) und (6.4) auszuschließen. Dies ist natürlich nur ein Trick. Auf diese Weise wird in der syntaktischen Kategorie ein Unterschied gemacht, dem kein semantischer Unterschied entspricht. [3] Dies wird bei unserer Lösung ebenso der Fall sein; unser Ansicht nach ist dies auch nicht zu vermeiden. Wir wollen jedoch hier in der Semantik einen anderen Weg gehen. Wir führen den Typ einer **Garbe** ein. Dieser ist rein äußerlich nicht von einer Menge bzw einer Gruppe zu unterscheiden. Während aber die Mitglieder einer Gruppe (dh Menge) gedanklich als Einheit betrachtet werden, werden die Mitglieder einer Garbe in Konkurrenz zueinander gesehen. Wir sagen, die Menge aller Stühle sei eine Garbe und keine Gruppe, weil ich zu einer bestimmten Gelegenheit mit dem Wort Stuhl nicht alle Stühle meine, sondern eben nur einen. Den Unterschied wollen wir im Folgenden herausarbeiten. Wir führen nun zunächst einen neuen Typkonstruktor $\circ$ ein.

[3] Dies ist im Übrigen bei dem Unterschied zwischen $\beta\backslash\alpha$ und α/β auch schon der Fall.

Ist α ein Typ, so sei auch α° ein Typ, der Typ der **Garbe** über α. Eine Garbe über α ist eine Menge von Objekten des Typs α. Betrachten wir nun die folgenden Sätze.

(6.5) Paul oder Sophie rennt.
(6.6) Paul und Sophie rennen.

In beiden Fällen ist die Bedeutung der Nominalphrase eine Menge, aber das eine Mal ist sie eine Garbe, das andere Mal eine Gruppe. Dies soll auch der Grund sein, warum das eine Mal das Verb disjunktiv interpretiert wird und das andere Mal konjunktiv. Technisch gesehen werden wir die Bedeutung von Verbs rennt als Funktion von Garben in Wahrheitswerte ansetzen. Dabei gilt grundsätzlich folgende Beziehung: ist $\mathbb{X}$ eine Garbe und f eine Funktion vom Typ $\alpha \to \beta$, so sei f^γ eine Funktion vom Typ $\alpha^\circ \to \beta$, welche definiert ist durch

$$f^\gamma(\mathbb{X}) = 1 \text{ gdw ein } x \in \mathbb{X} \text{ existiert mit } f(x) = 1$$

(Wir wollen von nun an vereinbahren, daß Tafellettern Garben bezeichnen und Großbuchstaben Gruppen. Kleinbuchstaben bezeichnen allgemeine Elemente (können also, wie oben, evtl auch für Gruppen stehen.) Da nun $[\mathsf{rennt}]^{\mathfrak{M}}$ bisher nur eine Funktion von V nach 2 ist, heben wir sie auf Garben an. Ist X eine Garbe, so ist folglich $([\mathsf{rennt}]^{\mathfrak{M}})^\gamma(\mathbb{X}) = 1$ gdw ein $x \in \mathbb{X}$ existiert mit $[\mathsf{rennt}]^{\mathfrak{M}}(x) = 1$. Da nun rennt faktisch auch auf Garben definiert ist, erklären wir kurzerhand:

$$[\mathsf{renn}^\spadesuit]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X}) = 1 \text{ gdw ein } x \in \mathbb{X} \text{ existiert mit } [\mathsf{renn}^\spadesuit]^{\mathfrak{M}}(x) = 1$$

Dies soll für alle Verben und alle Garben X gelten. Man nennt eine solche Beziehung ein Bedeutungspostulat. Es erklärt uns, wie die Verbbedeutung sich mit den Garben verträgt. Man beachte, daß die Definition nur scheinbar zirkulär ist. Ist $\mathbb{X}$ eine Garbe, so ist x selbstverständlich *keine* Garbe. Im Übrigen gilt diese Definition selbstverständlich nicht, wenn $\mathbb{X}$ eine Gruppe ist, auch wenn Gruppen und Garben semantisch gesehen gleich sind! [4] Das letzte Stück ist nun die Bedeutung von oder. Wir sagen, oder schaffe eine

[4] Wir machen also hier einen Unterschied in dem Typ (dh nicht der Kategorie), obwohl dem kein real vorgzeigbarer Unterschied gegenübersteht.

Garbe auf folgende Weise.

$$X \odot Y := \begin{cases} X \cup Y & \text{falls } X \text{ und } Y \text{ Garbe} \\ \{X\} \cup Y & \text{falls nur } Y \text{ Garbe} \\ X \cup \{Y\} & \text{falls nur } X \text{ Garbe} \\ \{X, Y\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Definition ist deshalb so kompliziert, weil eine Gruppe oder Urelement technisch gesehen keine Garbe ist. Wir müssen aber nicht nur Garben aus Einzeldingen schaffen, sondern auch Garben aus Garben, etwa in

(6.7) Paul oder Anne oder Sophie
(6.8) Paul oder Anne oder Sophie oder Stefan

Wir erlauben es aber nicht, einen Gegenstand x einfach zu der Einergarbe $\{x\}$ anzuheben, obwohl dies technisch gesehen möglich wäre.

Es ist also $[\text{Paul oder Sophie}]^{\mathfrak{M}} = \{x_1, x_3\}$. Aufgrund unseres Postulates ist

$$[\text{schläft}]^{\mathfrak{M}}(\{x_1, x_3\}) = 1$$

denn Paul schläft. Man beachte, daß ebenfalls $[\text{Paul und Sophie}]^{\mathfrak{M}} = \{x_1, x_3\}$. Dennoch gilt

$$[\text{schlafen}]^{\mathfrak{M}}(\{x_1, x_3\}) = 0$$

Es gilt nun zu klären, welchen semantischen Beitrag der Plural gegenüber dem Singular leistet. Wir haben gesagt, Stuhl bezeichne eine Garbe, überhaupt alle Nominalphrasen bezeichnen Garben, sofern sie keine Eingeldinge oder Gruppen bezeichnen. Also bezeichnet auch Stühle eine Garbe. Der Plural zeigt uns hier allerdings an, daß wir es jetzt nicht mit Einzelstühlen, sondern mit Gruppen (!) von Stühlen zu tun kriegen. Und zwar bedeutet Stühle nichts als die Garbe aller Mengen (= Gruppen) von Stühlen. Wir nehmen nun wie im letzten Abschnitt erklärt an, Stuhl und Stühle bestehen jeweils aus der Wurzel, genannt Stuhl♠, und einem Morphem SG bzw PL. Die Sequenz Stuhl♠⌢SG bzw Stühle♠⌢PL wird dann Stuhl bzw Stühle ausgesprochen. Dann bezeichnet Stuhl♠ jetzt die Garbe aller Stühle. SG ist die Identität. Sie ordnet einer Garbe schlicht sich selbst zu. Also ist

$$[\text{SG}]^{\mathfrak{M}}([\text{Stuhl}^{\spadesuit}]) = [\text{Stuhl}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}$$

PL jedoch bildet zu der Garbe $\mathbb{X}$ die Garbe $\wp(\mathbb{X})$. Man beachte aber, daß die Elemente der Garbe jetzt Gruppen sein sollen! Das bedeutet, daß semantisch gesehen PL den Typ $e^\circ \to e^{\bullet\circ}$ hat. Es macht aus einer Garbe $\mathbb{X}$ die Garbe der Gruppen aus $\mathbb{X}$.

$$\begin{array}{lllll} \text{SG} & : & e^\circ \to e^\circ & : & \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X} \\ \text{PL} & : & e^\circ \to e^{\bullet\circ} & : & \mathbb{X} \mapsto \wp(\mathbb{X}) \end{array}$$

Garben treten außer bei der Disjunktion auch bei Quantoren und Determinatoren auf. Betrachten wir die folgenden Sätze.

(6.9) Eine Katze schläft.
(6.10) Alle Katzen schlafen.
(6.11) Drei Mäuse sind im Zimmer.

Hierbei sind die Worte eine, alle, sowie drei Quantoren bzw Determinatoren. (Die Terminologie ist in der Literatur nicht immer eindeutig.) (6.9) ist wahr, falls es eine Katze gibt, welche schläft. (6.10) ist wahr, wenn für jede Katze gilt: sie schläft. In der Prädikatenlogik benutzt man dabei das Symbol $\exists$ und $\forall$. Etwa kann man (6.9) und (6.10) wie folgt notieren:

(6.9′) $(\exists x)(\mathsf{katze}'(x) \wedge \mathsf{schläft}'(x))$
(6.10′) $(\forall x)(\mathsf{katze}'(x) \to \mathsf{schläft}'(x))$

Hierbei ist katze' ein 1–stelliges Funktionsymbol, welches unserem umgangssprachlichen Wort Katze entsprechen soll. Ebenso für $\mathsf{schläft}'$. (6.9) ist unmittelbar einleuchtend. Wir können (6.10′) etwa so paraphrasieren: für jedes Ding gilt: ist es eine Katze, so schläft es. (Also nicht: für jedes Ding, es ist eine Katze und schläft! Deswegen muß hier der Pfeil stehen.)

Montague hatte bei seiner Formulierung die Prädikatenlogik verwendet. Er hat einen Mechanismus angegeben, wie man (6.9′) aus (6.9) und (6.10′) aus (6.10) bekommt. Für viele Quantoren und Determinatoren ist das aber entweder mühsam oder aber schlechterdings unmöglich. Deswegen hat man irgendwann die Quantoren $\forall$ und $\exists$ durch sogenannte **Generalisierte Quantoren** ersetzt. Wir gehen diesen Weg allerdings auch nicht. Auf die Gründe wollen wir ebenfalls nicht eingehen. In unserem System ist die Lage jedenfalls recht einfach. Ein Quantor ist eine Funktion, welche aus einer Garbe eine neue Garbe macht. ein ist der einfachste: er ordnet $\mathbb{X}$ sich selbst zu. Die anderen sine etwas aufwendiger. Sie benötigen Garben von Gruppen und schaffen als Ergebnis neue Garben von Gruppen. Und zwar: ist $\mathbb{X}$ eine Garbe von Gruppen, so sei $[\mathsf{zwei}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X})$ diejenige Garbe, welche nur die zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{X}$ enthält, und $[\mathsf{drei}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X})$ diejenige Garbe, welche alle dreielementigen Mengen in $\mathbb{X}$ enthält. Ist M eine Menge, so bezeichnet $\sharp M$

die Anzahl der Elemente von M.

$$\begin{array}{lcl} [\mathsf{ein}]^{\mathfrak{M}} & : & \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X} \\ [\mathsf{zwei}]^{\mathfrak{M}} & : & \mathbb{X} \mapsto \{Y \in \mathbb{X} : \sharp Y = 2\} \\ [\mathsf{drei}]^{\mathfrak{M}} & : & \mathbb{X} \mapsto \{Y \in \mathbb{X} : \sharp Y = 3\} \end{array}$$

Man beachte, wie sich hier alles fügt. ein will den Singular haben, da die Mitglieder der Garbe als Einzeldinge fungieren. Das Verb steht auch im Singular, und so werden die Mitglieder der Garbe als Einzeldinge behandelt. Die anderen Quantoren aber wollen den Plural, denn sie schaffen Garben von Gruppen. Das Verb steht auch im Plural, denn es handelt ja von Gruppen als Gruppen (und nicht als Einzeldingen). (6.9) ist wahr in $\mathfrak{M}$, wenn es ein Mitglied der Garbe $[\mathsf{eine\ Katze}]^{\mathfrak{M}}$ gibt, auf welches $[\mathsf{schläft}]^{\mathfrak{M}}$ zutrifft. Dies ist der Fall genau dann, wenn es ein Mitglied der Garbe $[\mathsf{Katze}]^{\mathfrak{M}}$ gibt, auf welche $[\mathsf{schläft}]^{\mathfrak{M}}$ zutrifft, genau dann, wenn es eine Katze in $\mathfrak{M}$ gibt, welche schläft. (6.11) ist wahr in $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn es ein Mitglied der Garbe $[\mathsf{drei\ Mäuse}]^{\mathfrak{M}}$ gibt, welche in meinem Zimmer sind (in $\mathfrak{M}$), genau dann, wenn es eine Gruppe Y mit drei Mitgliedern gibt, welche in der Garbe $[\mathsf{Maus}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{pl}]^{\mathfrak{M}}$ ist und in meinem Zimmer. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Teilmenge $Y \subseteq [\mathsf{Maus}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}$ gibt mit drei Elementen, und Y ist in meinem Zimmer. Das bedeutet ja nichts anderes, als daß drei Mäuse in meinem Zimmer sind (im Modell $\mathfrak{M}$).

Für alle ist nun die Lage anders. $[\mathsf{alle}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X})$ diejenige Gruppe (!), welche maximal in X ist. Wir bekommen also hier keine Garbe, sondern eine Gruppe. Darum sagen wir auch, alle ist ein **Determinator** und kein Quantor.

$$[\mathsf{alle}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X}) = Y, \text{ falls } Z \subseteq Y \text{ für alle } Z \in \mathbb{X}\text{; ansonsten undefiniert}$$

Die Funktion ist also nicht definiert, wenn $\mathbb{X}$ gar kein alle anderen Elemente enthaltendes Element hat. Analog verhält sich ein anderes Wort: der. Der Satz

(6.12) Der Kater schläft.

ist wahr, falls es einen und nur einen Kater gibt, und er schläft. Er ist falsch, wenn es einen und nur einen Kater gibt, und er schläft nicht. Der Satz ist ansonsten undefiniert. Die Tatsache, daß er nicht definiert ist, wenn es mehr als eine Katze gibt, schieben wir dem Wort der unter. Ist X eine Garbe, so prüft die Funktion $[\mathsf{der}]^{\mathfrak{M}}$, ob es mehr als Element darin gibt. Falls ja, ist sie undefiniert. Falls nein, so gibt sie uns das Element in $\mathbb{X}$.

$$[\mathsf{der}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X}) := y, \text{ falls } \mathbb{X} = \{y\}\text{; ansonsten undefiniert}$$

Also: die Bedeutung von Kater im Modell ist eine Garbe, bestehend aus allen Katern. Falls es genau ein Element darin gibt, etwa x_1, so ist $[\text{der Kater}]^{\mathfrak{M}} = x_1$. Der Satz (6.12) ist dann wahr oder falsch, je nachdem x_1 schläft oder nicht. Gibt es mehr als einen Kater, so ist $[\text{der Kater}]^{\mathfrak{M}}$ nicht definiert.

In der Literatur wird oft davon ausgegangen, daß ein ebensoviel bedeutet wie mindestens ein, zwei soviel wie mindestens zwei usf. Das heißt, anstelle von der obenstehenden Semantik für drei hätten wir ansetzen sollen:

$$[\text{drei}]^{\mathfrak{M}} : \mathbb{X} \mapsto \{Y \in X : \sharp Y \geq 3\}$$

Dies ist jedoch nicht korrekt. Wenn wir etwa sagen:

(6.13) Gestern haben sich drei Studenten getroffen.
(6.14) Diese Theorie vereint drei Grundkräfte miteinander.

Dann meinen wir in diesen Beispielen wirklich drei, nicht möglicherweise vier. Der Satz (6.14) wird unseres Erachtens falsch, wenn die besagte Theorie vier Grundkräfte vereinigt. Um dies zu belegen, müssen wir das Problem näher betrachten. Der Grund für die allgemeine Annahme, drei bedeute soviel wie mindestens drei liegt darin, daß viele Verben distributiv sind und deswegen ein Satz mit mindestens drei schwächer ist als der analoge Satz mit genau drei. Ist also (6.15) richtig, so auch (6.16), während die Umkehrung nicht gelten muß.

(6.15) Gestern haben mindestens drei Politiker eine Rede gehalten.
(6.16) Gestern haben drei Politiker eine Rede gehalten.

Dies ist jedoch nicht der Bedeutung von mindestens drei und drei geschuldet, sondern der Tatsache, daß eine Rede halten distributiv ist. Jeder Politiker hält seine eigene Rede. Jetzt betrachte man

(6.17) Diese Klasse besteht aus 32 Schülern.
(6.18) Diese Klasse besteht aus mindestens 32 Schülern.
(6.19) Die Kommission besteht aus Sophie und Paul.
(6.20) Die Kommission besteht aus Paul.

Daß bestehen aus garantiert nicht distributiv ist, zeigen (6.19) und (6.20). Es kann (6.19) wahr sein und (6.20) falsch. Ebenso kann (6.17) wahr sein und (6.18) falsch.

Es fehlt uns nur ein noch ein kleines Detail. Wir haben die Semantik von und noch nicht auf Garben erklärt. Daß dies aber nötig ist, zeigen folgende Beispiele

(6.21) Paul und Sophie oder Isabel haben geheiratet.
(6.22) Tausende von Athenern und Spartanern kamen ums Leben.

In (6.21) wollen wir einerseits die Lesart zulassen, in der Paul und Sophie geheiratet haben oder aber nur Isabel; andererseits wollen wir die Lesart haben, bei der Paul geheiratet hat und auch Sophie oder Isabel. Die letzte Lesart ist die für uns interessante. Ebenso in (6.22), in welcher wir sagen wollen, daß Tausende von Menschen ums Leben kamen, welche eben Spartaner oder Athener waren. Wir verabreden, daß für Garben $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ gelten soll:

$$\begin{aligned} \mathbb{X} \mathbin{\widehat{\oplus}} \mathbb{Y} &:= \{U \widehat{\oplus} V : U \in \mathbb{X}, V \in \mathbb{Y}\}, \\ \mathbb{X} \oplus \mathbb{Y} &:= \{U \oplus V : U \in \mathbb{X}, V \in \mathbb{Y}\} \end{aligned}$$

Dies heißt: ist $\mathbb{X}$ die Garbe der Athener, $\mathbb{Y}$ die Garbe der Spartaner, so besteht die Garbe $\mathbb{X} \mathbin{\widehat{\oplus}} \mathbb{Y}$ jetzt aus allen Gruppen, welche Spartaner und Athener enthalten, gleich in welcher Anzahl. (Gewiß wird man fairerweise verlangen, daß in einer Gruppe von Athenern und Spartanern mindestens ein paar Athener sowie Spartaner beteiligt sind, aber es ist nicht klar, aus welchem Grund eine solche Bedingung existiert.) Man beachte, daß es keine Garben von Garben gibt.

Übungen

Übung 26. Berechnen Sie die folgenden Garben

(6.23) (Anne oder Isabel) und (Paul oder Lukas)
(6.24) Anne oder ((Isabel und Paul) oder Lukas)
(6.25) (Anne oder (Isabel und Paul)) oder Lukas

Die Klammern sind zur Desambiguierung eingesetzt.

Übung 27. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Modell, bei dem das Universum aus den Urelementen $\{y_1, y_2, y_3\}$ besteht (zuzüglich der Gruppen und Gruppen von Gruppen etc!). Bestimmen Sie alle Gruppen und alle Gruppen von Gruppen. Ist die Menge $\{y_1, \{y_2, y_1\}\}$ eine Gruppe? Ist sie eine Gruppe von Gruppen? Zeigen Sie, daß man diese Menge durch die Operationen $\widehat{\oplus}$ und $\oplus$ herstellen kann.

Übung 28. Es sei $[\mathsf{Stuhl}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}} = \{y_1, y_3\}$. Bestimmen Sie die Garbe $[\mathsf{Stuhl}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{sg}]^{\mathfrak{M}}$ und die Garbe $[\mathsf{Stuhl}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{pl}]^{\mathfrak{M}}$.

Übung 29. Sei in dem obenstehenden Model $\mathfrak{M}$ zusätzlich $[\mathsf{stört}]^{\mathfrak{M}} = \{y_1, y_2\}$. Berechnen Sie, ob folgende Sätze wahr sind:

(6.26) Ein Stuhl stört.
(6.27) Zwei Stühle stören.

Übung 30. Zeigen Sie: ist V distributiv, so ist folgender Schluß allgemein gültig:

$$\frac{\text{Zwei As V-en.}}{\text{Ein A V-t.}}$$

Wir verhält es sich mit diesem Schluß:

$$\frac{\text{Ein A V-t.} \qquad \text{Ein A V-t.}}{\text{Zwei As V-en.}}$$

7 Die Nominalgruppe II

Zur Nominalgruppe gehören nun nicht nur Determinatoren und Substantive sondern auch Adjektive. In diesem Abschnitt wollen wir uns ausschließlich mit ihnen befassen. Dabei wollen wir erstens herausarbeiten, welchen semantischen Typ sie haben und zweitens eine neue Kompositionsregel für Modifikatoren entwickeln. Diese wird sich auch an anderer Stelle als nützlich erweisen. Wir betrachten nun Adjektive wie etwa blau, groß, hölzern, klug usw. Auch sie bezeichnen offenbar Mengen von Gegenständen, nämlich die blauen, großen, hölzernen, klugen usw Dinge. Wir sehen hierbei von Schwierigkeiten ab, wie etwa der Tatsache, daß gewissen Dingen gewisse Eigenschaften weder zu- noch abgesprochen werden können. Zum Beispiel macht es keinen besonderen Sinn, von einer blauen Demokratie zu sprechen. Was immer das Ding genannt 'Demokratie' sei, es ist irgendwie weder blau noch nicht blau.

Wenn wir also sagen wollen, einem Ding komme eine gewisse Eigenschaft, zB blau zu sein, etweder zu oder nicht, so bedeutet dies, daß Adjektive — relational gesehen — Mengen sind, wie auch Substantive und intransitive Verben. Der funktionale Typ der Adjektive wäre dann gleich $e \to t$. Die Syntax von Adjektiven ist jedoch verschieden von der der Substantive wie auch von der der Verben. Es sind (7.1) und (7.2) grammatisch, (7.3) und (7.4) dagegen nicht.

(7.1) ein blauer Stuhl
(7.2) eine kluge Katze
(7.3) *eine Katze kluge
(7.4) *eine Stuhl Demokratie

Adjektive sind Modifikatoren, und im Deutschen stehen sie immer links vom modifizierten Nomen. Dem kann man in der Kategorialgrammatik sehr leicht Rechnung tragen. Hat ein Substantiv die Kategorie n, so hat das Adjektiv die Kategorie n/n, was immer n ist. Adjektive, die nachgestellt werden (sogenannte Postmodifikatoren) haben dann den Typ $n\backslash n$. Im Französischen ist ein Adjektiv allerdings wechselnd vom Typ n/n oder $n\backslash n$. Das Adjektiv brave hat im Übrigen eine verschiedene Bedeutung, je nachdem, ob es vorangestellt wird oder nachgestellt. Folgen wir diesem Wink der Syntax, dann müssen wir annehmen, daß der semantische Typ eines Adjektivs $n \to n$ ist, also eine Funktion, welche aus einer Bedeutung für ein Nomen wieder eine Bedeutung für ein Nomen macht. Vergessen wir für den Moment die Garben und denken wir uns, die Bedeutung eines Nomen sei eine Menge. Ist die Bedeutung des Adjektivs A etwa die Menge A, die des Nomens N die Menge N, dann ist die Bedeutung von der Konstituente [A N] gleich $A \cap N$. Ist $\{x_1, x_4\}$ die Menge der Katzen, $\{x_2, x_1\}$ die Menge der grauen Dinge, so ist offensichtlich $\{x_1\}$ die Menge der grauen Katzen. So weit, so einfach.

Man fragt sich nun, warum man die Dinge so kompliziert gestalten muß. Kann es nicht einfach sein, daß der syntaktische Typ eines Adjektivs n/n ist, aber der semantische Typ eines Adjektivs schlicht n? Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Denn es gibt durchaus Adjektive, deren Bedeutung nicht unabhängig von dem modifizierten Nomen ist. Ein solches Adjektiv ist groß. Wir schließen nämlich von (7.5) und (7.6) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, aber wohl nicht von (7.7) auf (7.8).

(7.5) Sophie ist ein großes Mädchen.
(7.6) Sophie ist 1 Meter 60 groß.
(7.7) Paul ist ein großer Kater.
(7.8) Paul ist 1 Meter 60 groß.

Offensichtlich ist es nicht dasselbe, groß als Kater zu sein und groß als Mädchen; oder gar: groß als Stern! Das Wort groß hat also keine Bedeutung, die sich absolut bestimmen läßt, sondern sie hängt von der Bedeutung des modifizierten Nomens ab. Dasselbe gilt für klug oder gut. Ein guter Lehrer muß kein guter Mensch sein, eben weil es für das Lehrer–Sein andere Anforderungen gibt wie für das Mensch–Sein.

Dies macht verständlich, daß wir für Adjektive nicht einfach annehmen dürfen, sie seien Eigenschaften von Dingen an sich, sondern sie sind Eigenschaften von Dingen im Hinblick auf ein Etwas–Sein. Die Dinge werden noch schlimmer, wenn wir uns auf eine andere Sorte Adjektive stürzen, die man *nicht–veridisch* nennt.

(7.9) Dies ist ein falsches 5 Mark Stück.
(7.10) Dies ist ein 5 Mark Stück.
(7.11) Der damalige Ministerpräsident ist jetzt Aufsichtsratsvorsitzender.
(7.12) Der Ministerpräsident ist jetzt Aufsichtsratsvorsitzender.

Offensichtlich wollen wir nicht sagen, daß (7.10) aus (7.9) folgt, sondern gerade das Gegenteil! Ist etwas ein falsches N, so ist es gerade nicht ein N, das ist es ja, was falsch besagt. Wir können also unmöglich sagen, ein Ding an sich sei 'falsch'. Ein Stück Metall kann ein richtiges Stück Metall sein aber eben ein falsches 5 Mark Stück. Genauso ist der damalige Ministerpräsident nicht notwendig auch heute noch Ministerpräsident, also folgt aus (7.11) nicht (7.12).

Dies führt zu folgender Terminologie. Wir nennen ein Adjektiv A **veridisch**, falls folgender Schluß gültig ist (P ein Subjektsausdruck, N ein Nominalausdruck).

$$\frac{\textsf{P ist ein A N.}}{\textsf{P ist ein N.}}$$

A heißt **intersektiv**, wenn es veridisch ist und zusätzlich folgende Schlüsse gültig sind.

$$\frac{\textsf{P ist ein A N.}}{\textsf{P ist A.}} \qquad \frac{\textsf{P ist ein A.} \qquad \textsf{P ist ein N.}}{\textsf{P ist ein A N.}}$$

(Wir sehen bei der Formulierung von der Flektion ab. Es muß natürlich heiß Paul ist ein großer Kater. und nicht Paul ist ein groß Kater.) Wir können diese Begriffe auch auf Modelle relativieren. Ist $\mathfrak{M}$ ein Modell und $[\mathsf{Ad}]^{\mathfrak{M}}$ die Bedeutung eines gegebenen Adjektivs A, so ist A **veridisch in $\mathfrak{M}$**, falls $H(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}$ für alle Garben ist. A is intersektiv, falls es eine Garbe $\mathbb{Y} \subseteq V$ gibt mit $H(\mathbb{X}) = \mathbb{Y} \cap \mathbb{X}$ für alle Garben $\mathbb{X}$. Ein Adjektiv is dann veridisch bzw intersektiv gdw es in jedem Modell veridisch bzw intersektiv ist.

Wir sehen also, der oben diskutierte Normalfall von Adjektiven wird von intersektiven Adjektiven verkörpert. Da nun ein großer Teil der Adjektive intersektiv sind, stellt sich die Frage, ob es zweckmäßig ist, auch ihnen den Typ n/n zuzuweisen. Wäre es da nicht einfacher, ihnen den Typ n zuzuweisen? Dies kann man in der Tat tun. Allerdings müssen wir eine neue Bedeutungsregel einführen. Bisher war die Bedeutung einer Konstituente immer so definiert, daß ein Teil der Konstituente ein Funktor war und der andere sein Argument. Hier ist das nun nicht so. Wir erlauben daher zusätzlich:

Modifikatorenregel. Sind A und B Konstituenten gleichen semantischen Typs α, und kann A Modifikator der Konstituente B sein, so ist auch $[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]$ eine Konstituente mit semantischen Typ α. Die Kategorie ist gleich der Kategorie von B und es ist

$$[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]^{\mathfrak{M}} = [\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}} \cap [\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}$$

Natürlich muß $\cap$ entsprechend definiert sein. In unserem Fall ist also A ein Adjektiv, sagen wir grau, N ein Nomen, sagen wir Katze, und so ist dann $\mathsf{graue\ Katze}$ eine Konstituente, deren Kategorie gleich der von Katze ist (wir haben sie mit n bezeichnet). [5] Ist die Bedeutung der Elemente jeweils eine Menge, so muß den Durchschnitt bilden. Ist die Bedeutung eine Funktion χ bzw χ', so erhält man $\chi \cap \chi'$ (dies ist in einer Übung definiert worden). In der Tat sind aber die Bedeutung von Nomina im Singular Garben. Wir müssen uns also darum kümmern, was der Durchschnitt von Garben ist. Dies sei schlicht die Schnittmenge der jeweiligen Garben. Schauen wir uns die Sache im Plural an. Es sei $\{k_1, k_2, k_3\}$ die Menge der Katzen und $\{k_2, k_3, k_5, k_7\}$ die Menge der grauen Dinge. Es ist dann

$$\begin{array}{lcl}
[\mathsf{Katze}^{\spadesuit}{}^\frown\mathrm{PL}]^{\mathfrak{M}} & = & \wp(\{k_1, k_2, k_3\}) \\
[\mathsf{grau}^{\spadesuit}{}^\frown\mathrm{PL}]^{\mathfrak{M}} & = & \wp(\{k_2, k_3, k_5, k_7\}) \\
[\mathsf{graue\ Katzen}]^{\mathfrak{M}} & = & \wp(\{k_2, k_3\})
\end{array}$$

Denn erstens ist ja $\mathsf{graue\ Katzen}$ die Zeichenkette, die zu

$$\mathsf{grau}^{\spadesuit}{}^\frown\mathrm{PL}^\frown\mathsf{Katze}^{\spadesuit}{}^\frown\mathrm{PL}$$

gehört. Zweitens: es ist

$$X \in \wp(M) \cap \wp(N) \text{ genau dann, wenn } X \in \wp(M) \text{ und } X \in \wp(N)$$

Denn sei $X \in \wp(M)$ und $X \in \wp(N)$. Dann ist $X \subseteq M$ und $X \subseteq N$. Daraus schließt man sofort $X \subseteq M \cap N$, also $X \in \wp(M \cap N)$. Ist umgekehrt $X \in \wp(M \cap N)$, so $X \subseteq M \cap N$, und so $X \subseteq M$ und $X \subseteq N$. Daraus schließen wir $X \in \wp(M)$ sowie $X \in \wp(N)$.

Offensichtlich funktioniert im Plural alles also ebenso wie im Singular. Betrachten wir noch einmal unsere Definition von Quantoren. Diese waren

[5] Kategorialgrammatisch muß man hier ein paar Winkelzüge machen, denn jetzt hat ja auch das Adjektiv die Kategorie n. Wir ignorieren das Problem hier.

Funktionen van Garben nach Garben. Man kann viele solche Quantoren alternativ wie intersektive Adjektive behandeln. Ein Gruppe von fünf Mandeln ist nämlich eine Gruppe aus fünf Elementen und eine Gruppe von Mandeln. Ebenso ist eine Gruppe, welche fünf Dinge enthält und eine Gruppe von Mandeln ist, eine Gruppe von fünf Mandeln. Daraus folgt, daß es durchaus Sinn machen kann, Anzahlquantoren wie intersektive Adjektive zu behandeln. Dies funktioniert jedoch nicht mit Determinatoren. Falls ich alle Mandeln aufesse, esse ich ja nicht einfach alle Dinge auf, sondern nur alle Mandeln.

Es bleibt uns als Letztes zu klären, was im Singular und Plural mit nicht intersektiven Adjektiven passiert. Wir wissen schon, ihre Bedeutung ist eine Funktion von Eigenschaften nach Eigenschaften, welche wir als Funktion von Mengen nach Mengen ansehen. Ist also A ein Adjektiv, so hat es den Typ $e^\circ \to e^\circ$. Für eine gegebene Garbe $\mathbb{X}$ wirft es eine Garbe $H(\mathbb{X})$ aus. Dies müssen wir jetzt auf Gruppen replizieren. Ist also die Bedeutung von Lehrer eine Garbe (= die Garbe der Lehrer), so wird jetzt die Bedeutung von guter Lehrer jetzt wieder eine Garbe sein, nämlich die Garbe der guten Lehrer. Im Singular ist das Leben also einfach. Wir nehmen nun an, ein Adjektiv ist stets distributiv in Bezug auf Gruppen.

(7.13) ein guter Lehrer
(7.14) viele gute Lehrer

In (7.13) reden wir von einem guten Lehrer, in (7.14) von einer Gruppe von vielen Lehrern, von denen jeder einzelne gut ist (als Lehrer). Hat ein Adjektiv den semantischen Typ $e^\circ \to e^\circ$, so hat jetzt der Plural den Typ

$$\textsc{pl} : (e^\circ \to e^\circ) \to (e^{\bullet\circ} \to e^{\bullet\circ})$$

Ist dann H die Bedeutung eines Adjektivs, so ist der Plural dazu eine Funktion $H^\bullet$, welche einer Garbe $\mathbb{X}$ von Gruppen die Garbe $\{Y : Y \subseteq H(\mathbb{X})\}$ zuordnet. Also Achtung: wir nehmen nicht die Garbe $\{H(Y) : Y \subseteq \mathbb{X}\}$. Wenn wir also die Garbe der guten Lehrer betrachten, so enthält sie auch die Gruppe der guten Lehrer, welche Klavier spielen, und nicht etwa nur die Gruppe der Lehrer, welche gut als klavierspielende Lehrer sind. Wir wollen dies jedoch nicht weiter ausführen.

Es bleibt zu guter Letzt noch in der Nominalgruppe der Relativsatz. Relativsätze, zumindest die sogenannte restriktiven Relativsätze — und um die soll es hier gehen —, funktionieren wie Adjektive, nur werden sie nicht voran- sondern nachgestellt. Relativsätze werden ihrerseits aus normalen Nebensätzen gebildet, indem ein Nomen durch das Relativpronomen ersetzt wird, welches immer an erster Stelle steht:

(7.15) eine Katze, die rennt
(7.16) ein Kater, der Sophie ärgert

Wir wollen die Sache einfach halten und nur Relativpronomina im Nominativ studieren. Diese ersetzen also das Subjekt. Daraus können wir dann die Semantik leicht ableiten. Ein subjektloser Satz hat den semantischen Typ $e^\circ \to t$ im Singular und $e^{\bullet\circ} \to t$ im Plural. Die Aufgabe des Relativpronomens ist es, daraus ein Adjektiv zu machen, also ein Objekt vom semantischen Typ $e^\circ \to e^\circ$ bzw $e^{\bullet\circ} \to e^{\bullet\circ}$. Dies ist nicht schwer. Bleiben wir im Singular. Sei H die Bedeutung des subjektlosen Satzes, etwa

(7.15′) ____ rennt
(7.16′) ____ Sophie ärgert

Dann bilden wir

$$\{Y : H(Y) = 1\}$$

Dies bedeutet: wir gehen von der Beschreibung des Subjekts, welche der Satz liefert, über zu der Menge der Dinge, die sie erfüllen. Dies ist jetzt eine Garbe, und wir behandeln sie wie ein intersektives Adjektiv. Im Plural stellt sich die Sache ebenso dar. Die Bedeutung eines subjektlosen Satzes im Plural ist eine Funktion $K : e^{\bullet\circ} \to t$. Wir gehen über zu der Garbe

$$\{Y : K(Y) = 1\}$$

und machen weiter wie im Singular.

Wir haben damit die Relativsätze den intersektiven Adjektiven gleichgestellt. Sie sind also in unserer Deutung stets intersektiv. Dies ist allerdings nicht gerechtfertigt, wie (7.17) belegt.

(7.17) Er bezahlte mit einem 5 Mark Stück, das gefälscht war.
(7.18) Die Gangster fälschten Millionen von 5 Mark Stücken.

Der Grund ist aber nicht in der obenstehenden Konstruktion zu suchen, sondern in der Tatsache, daß das Prädikat fälschen sich so merkwürdig verhält. (7.18) bedeutet ja nicht, daß die Gangster Millionen von (echten) 5 Mark Stücken besaßen, welche sie überdies fälschten. Sondern, daß sie Metallstücke herstellten, die nur den Anschein erwecken sollten, als wären sie 5 Mark Stücke. Es ist das Verb und seine Semantik, das uns hier einen Strich durch die Rechnung macht.

Übungen

Übung 31. Geben Sie die (syntaktischen) Kategorien von Adjektiven, vom Singular und Plural für Adjektive, und von den Relativpronomina und dem Singular und Plural für sie an. Wir gehen dabei davon aus, daß SG und PL Suffixe sind (dh sie werden nachgestellt).

Übung 32. Es sei A ein Adjektiv mit folgender Bedeutung:

$$\begin{array}{lllllll}
\{y_1, y_2, y_3\} & \mapsto & \{y_1, y_2\} & \qquad & \{y_1\} & \mapsto & \{y_1\} \\
\{y_1, y_2\} & \mapsto & \{y_1, y_2\} & & \{y_2\} & \mapsto & \{y_2\} \\
\{y_1, y_3\} & \mapsto & \{y_1\} & & \{y_3\} & \mapsto & \varnothing \\
\{y_2, y_3\} & \mapsto & \{y_2\} & & \varnothing & \mapsto & \varnothing
\end{array}$$

Ist A veridisch in diesem Modell? Ist A intersektiv?

Übung 33. Wie die vorige Aufgabe, aber mit folgender Bedeutung.

$$\begin{array}{lllllll}
\{y_1, y_2, y_3\} & \mapsto & \{y_1, y_2\} & \qquad & \{y_1\} & \mapsto & \{y_1\} \\
\{y_1, y_2\} & \mapsto & \{y_2\} & & \{y_2\} & \mapsto & \varnothing \\
\{y_1, y_3\} & \mapsto & \{y_1\} & & \{y_3\} & \mapsto & \varnothing \\
\{y_2, y_3\} & \mapsto & \{y_2\} & & \varnothing & \mapsto & \varnothing
\end{array}$$

Übung 34. Ein Adjektiv heiße **monoton**, falls gilt: ist jedes M auch N, so ist folgender Schluß gültig:

$$\frac{\text{P ist ein A M.}}{\text{P ist ein A N.}}$$

Zeigen Sie, daß ein intersektives Adjektiv auch monoton ist.

Übung 35. Geben Sie Beispiele dafür, daß veridische Adjektive nicht notwendig monoton sind.

8 Skopus

Ein wichtiges Thema, mit dem sich die formale Semantik befaßt, ist das von Lesarten und Ambiguität, speziell aber vom Skopus. Wir sagen, ein Satz habe mehrere Lesarten oder sei **ambig**, falls er je nach den Umständen verschiedene Dinge bedeutet. Es ist dabei nicht ausgemacht, wie viele Lesarten ein Satz haben kann, oder ob zwei vorgeschlagene Lesarten nicht vielleicht zu einer zusammengefaßt werden können. Ein Satz kann oft einfach nur vage sein, das heißt undeutlich, und wenn wir in einer bestimmten Situation sind, so kristallisiert sich je nach Lage der Dinge die eine oder die andere konkrete Version heraus. Was ich meine, wenn ich zum Beispiel sage, ich will eine gerechte Steuerreform, das ist wohl nicht so ohne weiteres klar. Meine Äußerung ist dann also vage, nicht ambig. Ein ambiger Satz ist aber nicht notwendig unklar. Er hat nur mehr als eine Bedeutung, welche wir klar umreißen können. Oft genug rankt sich die Ambiguität um verschiedene Alternativen, einen Satz logisch zu deuten.

Wir wollen dies an einem Beispiel klarmachen. Es heiße eine natürliche Zahl m **Nachfolger** der natürlichen Zahl n, falls $m = n + 1$. Betrachten wir den Satz (8.1).

(8.1) Jede Zahl hat einen Nachfolger.

Dieser Satz sagt Folgendes aus. Gegeben eine Zahl n, so existiert eine Zahl m, welche Nachfolger von n ist (nämlich $n+1$). Dieser Satz sagt jedoch *nicht*, daß es eine Zahl m gibt, welche Nachfolger jeder beliebigen Zahl n ist. In der Prädikatenlogik kann man diese beiden Interpretationen wie folgt sinnfällig machen. (Wir schreiben $y \doteq x + 1$ für den Sachverhalt, daß y der Nachfolger von x ist.)

(8.2) $(\forall x)(\exists y)(y \doteq x + 1)$
(8.3) $(\exists y)(\forall x)(y \doteq x + 1)$

Wie gesagt, bedeuten (8.1) und (8.2) dasselbe. Ferner ist (8.2) wahr aber (8.3) falsch. Der Unterschied zwischen (8.2) und (8.3) ist die Reihenfolge der Quantoren (hier $\exists y$ oder $\forall x$). Wir sagen nun, ein Vorkommen Q eines Quantors sei im **Skopus** eines Vorkommens Q' eines Quantors, falls die kleinste, Q' enthaltende Formel auch Q enthält. [6] Man definiert allerdings den Skopus für Teilformeln allgemein. Wir werden auch sehen, daß es noch ganz andere Skopusinteraktionen als die von Quantoren gibt.

Definition 8.1 *Es sei φ eine Formel und χ eine Konstituente verschieden von φ. Der **Skopus** von χ ist die kleinste, χ echt enthaltende Konstituente. Ist χ' Konstituente von φ, so ist χ' ist **im Skopus** von χ, falls der Skopus von χ die Konstituente χ' enthält.*

[6] Man beachte, daß wir von *Vorkommen von Quantoren* reden und nicht von *Quantoren*. Auch wenn es selten genug vorkommt, daß ein und derselbe Quantor mehrmals vorkommt, muß man dem dennoch Rechnung tragen.

So, wie die Definition gemacht ist, ist die Relation *ist im Skopus von* genau die Relation *wird c–kommandiert von*, die wir aus der Syntax kennen. Der Witz an der Prädikatenlogik ist nun, daß der syntaktischen Skopus genau den semantischen Aufbau reflektiert, während die c–Kommando–Relation in der natürlichen Sprache nur bedingt auf den semantischen Aufbau schließen läßt.

Hier sind nun die Subformeln von (8.2) und (8.3):

(8.2′) $(\forall x)(\exists y)(y \doteq x+1)$, $(\exists y)(y \doteq x+1)$, $y \doteq x+1$
(8.3′) $(\exists y)(\forall x)(y \doteq x+1)$, $(\forall x)(y \doteq x+1)$, $y \doteq x+1$

Wir sehen: in (8.2) ist der Existenzquantor $\exists y$ im Skopus des Allquantors $\forall x$, in (8.3) ist es umgekehrt.

Die Frage, ob ein Quantor im Skopus eines anderen Quantors steht, ist also bedeutungsrelevant. Jedoch ist dies nicht immer so. Folgendes gilt nämlich allgemein:

(8.4) $(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$
(8.5) $(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$

Existenzquantoren lassen sich also miteinander vertauschen, desgleichen Allquantoren. Haben wir jedoch einen Existenzquantor und einen Allquantor, so gilt im Allgemeinen nur

(8.6) $(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y) \to (\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$

Daß die umgekehrte Implikation in (8.6) nicht gelten muß, ist die Erkenntnis aus dem obigen Beispiel. Jedoch ist es nicht ausgeschlossen, daß die Umkehrung gilt. Dazu ein Beispiel.

(8.7) Jeder Student hat einen Vertrauensdozenten.

Dieser Satz hat eine logische Form wie (8.2). (8.7) schließt jedoch durchaus nicht aus, daß alle Studenten denselben Vertrauensdozenten haben, nur ist dies nicht, was dieser Satz aussagt.

Skopusinteraktionen treten natürlich nur dann auf, wenn es mehrere Quantoren gibt. Der einfachste Fall ist der eines transitiven Verbs. Wir haben bisher recht wenig über Quantoren bei transitiven Verben gesagt, und dies aus gutem Grund. Betrachten wir (8.8).

(8.8) Alle Menschen sprechen eine Sprache.

Wir können dies so lesen: für jeden Menschen x gibt es eine Sprache y derart, daß x y spricht. Oder aber: es gibt eine Sprache y derart, daß jeder Mensch x

y spricht. Versuchen wir nun, unsere Semantik der intransitiven Verben auf den Fall der transitiven Verben zu übertragen. Transitive Verben sind Funktionen von semantischen Typ $e^\bullet \to (e^\bullet \to t)$. Diese wird dann angehoben auf eine Relation zwischen Garben. Wir machen sie also zu Funktionen vom Typ $e^{\bullet\circ} \to (e^{\bullet\circ} \to t)$. Es sei also $[\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}}$ eine Funktion zwischen Gruppen (oder Einzeldingen). Ist dann $\mathbb{X}$ eine Garbe und y beliebig, so sei

$$[\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X})(y) = 1 \text{ gdw es existiert } x \in X \text{ mit } [\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}}(x)(y) = 1$$

Genauso verfahren wir mit dem anderen Argument. Wir setzen für eine Garbe $\mathbb{Y}$ und ein beliebiges x

$$[\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}}(x)(\mathbb{Y}) = 1 \text{ gdw es existiert } y \in \mathbb{Y} \text{ mit } [\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}}(x)(y) = 1$$

Nun haben wir: (8.8) ist wahr, falls es eine Sprache y gibt, derart, daß die Gruppe aller Menschen y spricht. Wir nehmen an, daß das Verb sprechen distributiv im Subjekt ist. Dann bekommen wir die gewünschte Lesart.

Das ist zumindest eine mögliche Lesart. Wie bekommen wir nun die andere? Die Antwort hierauf ist leicht: wir müssen uns daran erinnern, daß Verben ja distributiv sein können. Zunächst ist (8.8) wahr, falls für die Gruppe aller Menschen zutrifft, daß sie eine Sprache spricht. Ist nun sprechen in (8.8) distributiv, dann gilt: (8.8) ist wahr genau dann, wenn für gegebenes x aus der Gruppe der Menschen die Aussage (8.9) erfüllt ist.

(8.9) x spricht eine Sprache.

Dies wiederum bedeutet, daß für gegebenes x

$$[\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{Y})(x) = 1$$

wo $\mathbb{Y}$ die Garbe der Sprachen ist. Dies bedeutet: für jedes x, welches eine Mensch ist, existiert ein y, welches eine Sprache ist, sodaß x y spricht. Dies ist im Übrigen genau das, was wir erwarten müssen, wenn wir Definition der distributiven Lesart die Funktion $([\mathsf{sprech}]^{\mathfrak{M}})^\delta$ berechnen.

Wir haben also die verschiedenen Bedeutungen von (8.8) daraus abgeleitet, daß wir einmal das Verb als nicht distributiv und einmal als distributiv bezüglich des Subjekts angesehen haben. Spaßeshalber können wir ausrechnen, was passiert, wenn wir das Verb als distributiv bezüglich seines Objektes ansehen. Dann ist (8.8) wahr, wenn es eine Sprache gibt, welche von allen Menschen gesprochen wird. Es scheint also so zu sein, daß man nur zwei Lesarten bekommen kann, nämlich eine, bei der das Subjekt Skopus über dem

Objekt hat und eine bei der das Objekt Skopus über das Subjekt hat. Diese korrelieren mit den distributiven Lesarten des Verbs. Ist das Verb distributiv bezüglich des Subjekts, so nimmt das Subjekt das Objekt in seinen Skopus. Ist das Verb distributiv bezüglich seines Objekts, so nimmt das Objekt das Subjekt in seinen Skopus. Die Verhältnisse sind jedoch komplizierter. Betrachten wir folgenden Satz.

(8.10) Vier Träger schleppten drei Klaviere nach oben.

Wir verstehen dies so, daß es insgesamt vier Träger gab und drei Klaviere. Und irgendwie haben diese vier Träger diese drei Klaviere nach oben geschleppt. Nennen wir dies die **kumulative Lesart**. Wir geben nun zwei Alternativen an.

1. Es gab vier Träger, und jeder Träger schleppte drei Klaviere nach oben (distributiv im Subjekt). Also genau vier Träger und bis zu 12 Klaviere (aber mindestens drei Klaviere). Oder:

2. Es gab drei Klaviere, und jedes dieser Klaviere wurde von vier Trägern nach oben geschleppt. Also drei Klaviere und bis zu 12 Träger (aber mindestens vier Träger).

Wir sehen also, daß es zwar zwei Quantoren gibt, aber nicht zwei sondern drei Alternativen. Also ist offensichtlich Skopus nicht alles. Wir haben schon gesagt, daß die kumulative Variante für (8.10) bevorzugt ist. Dies ist schon aus dem Grunde plausibel, weil die Alternativen (1) und (2) besser wie folgt wiedergegeben werden.

(8.11) Vier Träger schleppten je drei Klaviere nach oben.
(8.12) Drei Klaviere wurden von je vier Trägern nach oben geschleppt.

Das Wörtchen je leistet hier einen entscheidenden Beitrag. Es weist uns darauf hin, daß das Subjekt distributiv bezüglich dem Objekt ist. Wir werden das nicht formalisieren. In manchen Sprachen (zB dem Lateinischen) gibt es sogar eigenständige Zahlwörter, sogennante **distributive** Zahlwörter. Man beachte, daß man nicht so leicht das Objekt distributiv bezüglich seinem Subjekt machen kann. (8.13) und (8.14) klingen schon etwas merkwürdig.

(8.13) Je vier Träger schleppten drei Klaviere nach oben.
(8.14) Je drei Klaviere wurden von vier Trägern nach oben geschleppt.

Es scheint also, als sei der Gebrauch von je im Subjekt nicht favorisiert. Allerdings gibt es einen Satz, in dem je auch in Subjektsposition zu finden ist.

(8.15) Je fünf Studenten haben je zwei Vertrauensdozenten.

Hier ist die Lage so: jeder Student hat zwei Vertrauensdozenten, und jeder Dozent hat fünf Studenten, deren Vertrauensdozent er ist. Man beachte: es folgt *nicht*, daß es nur fünf Studenten geben kann, noch daß es nur zwei Dozenten gibt.

Was die unterschiedlichen Lesarten betrifft (kumulativ, distributiv), so laufen die Fäden beim Verb zusammen. Eine Nominalphrase der Form je n N signalisiert, (wobei n eine Zahl ist), daß sie distributiv zu interpretieren sei. Trotzdem erscheint es unseres Erachtens ausgeschlossen, diese NP anders zu interpretieren als die NP n N. Das Wörtchen je ist also wie eine Flagge, welche die NP hißt, deren Bedeutung aber erst im Zusammenhang mit den anderen Satzteilnehmern zum Tragen kommt. Dafür spricht erstens die Tatsache, daß wir gleichzeitig das Subjekt wie das Objekt distribuieren können wie in (8.15), und zweitens spricht dafür die Tatsache, daß eine distributive NP ohne etwas, worauf sie distribuiert werden kann, sinnlos ist:

(8.16) *Je fünf Katzen schlafen.
(8.17) *Paul bewundert je zwei Musiker.
(8.18) *Höchstens ein Lehrer benotete je vier Abiturarbeiten.

Dabei ist es aber unerheblich, ob die distributive NP von einem Quantor oder von einer gewöhnlichen NP abhängt. Die Hauptsache ist, daß es sich um eine Gruppe handelt. (In den folgenden Beispielen findet man jeder anstelle von je.)

(8.19) Paul und Lukas hatten jeder vier Einsen auf dem Zeugnis.
(8.20) *Paul oder Lukas hatten jeder vier Einsen auf dem Zeugnis.

Zu guter Letzt kann man sich von Quantoren ganz befreien und fragen, wie viele Lesarten der folgende Satz (8.21) zuläßt:

(8.21) Paul und Lukas sind in Anne und Sophie verliebt.
(8.22) Paul und Lukas sind beide in Anne und Sophie verliebt.

Hier erscheinen für (8.21) zwei Interpretationen zulässig. Die erste, bei der Paul nur in Anne und Lukas nur in Sophie verliebt ist, und die andere, welche wir auch durch (8.22) ausdrücken können. Andere Interpretationen scheint es nicht zu geben.

Wie versprochen kommen wir auf Skopusinteraktion bei anderen Worten zu sprechen. Wir haben schon gesehen, daß (8.23) zwei verschiedene Möglichkeiten zuläßt. Je nachdem, welcher Koordinator Skopus über den anderen erhält, erhalten wir verschiedene Garben.

(8.23) Paul und Lukas oder Anne
und im Skopus von oder: $\{\{\text{Paul}, \text{Lukas}\}, \{\text{Anne}\}\}$
oder im Skopus von und: $\{\{\text{Paul}, \text{Anne}\}, \{\text{Lukas}, \text{Anne}\}\}$

Übungen

Übung 36. Erläutern Sie die Lesarten des folgenden Satzes.

(8.24) Einmal fährt jeder nach Rom.

Welche Lesart erscheint plausibler? Was läßt sich über das Verhältnis von Skopus und c–Kommando sagen?

Übung 37. In dem untenstehenden Beispiel ist der Skopus von mindestens explizit markiert. Paraphrasieren Sie die Lesarten.

(8.25) (Mindestens drei) Kinder waren beim Geburtstag.
(8.26) (Mindestens drei Kinder) waren beim Geburtstag.

Können Sie Unterschiede in der Bedeutung entdecken?

Übung 38. Paraphrasieren Sie die folgenden Sätze. Geben Sie an, welche Lesarten die jeweiligen Sätze haben.

(8.27) Paul und Lukas gaben Anne und Sophie drei Bücher.
(8.28) Paul und Lukas gaben Anne und Sophie je drei Bücher.
(8.29) Paul und Lukas gaben Anne und Sophie jeder drei Bücher.
(8.30) Paul und Lukas gaben Anne und Sophie jeder je drei Bücher.

Was läßt sich über den Unterschied zwischen je und jeder sagen?

Übung 39. Zeigen Sie, daß die distributive und nichtdistributive Lesart für alle im ersten Satz einen Unterschied in der Bedeutung geben, in dem zweiten jedoch nicht.

(8.31) Alle gaben dem Grafen oder der Gräfin die Hand.
(8.32) Alle gaben dem Grafen und der Gräfin die Hand.

Übung 40. Untersuchen Sie, was passiert, wenn man in den Sätzen des vorigen Übung alle durch jemand ersetzt.

9 Kontext und Präsupposition

Im täglichen Rechnen darf man mit Zahlen so ziemlich alles machen. Man darf sie addieren, multiplizieren, subtrahieren, dividieren. Nur eines darf man nicht: durch 0 teilen. Dies ist nämlich nicht definiert. Aussagen wie

(9.1) 2/0 ist eine gerade Zahl.
(9.2) 2/0 ist keine gerade Zahl.

sind daher in der Mathematik ausdrücklich verboten, eben weil 2/0 nicht existiert.

Wenn wir in den vorangegangenen Definitionen manchmal nur partielle Funktionen definiert haben, so stellt sich uns die Frage, was geschehen soll, wenn diese nicht definiert sind. Ein Beispiel mag dies illustrieren. Nehmen wir an, in meinem Zimmer sind zwei graue Katzen. Dann haben folgende Sätze keinen Wahrheitswert in unserer Semantik:

(9.3) Die graue Katze in meinem Zimmer ist fett.
(9.4) Die graue Katze in meinem Zimmer ist nicht fett.

In unserer Semantik ist nämlich $[\mathsf{die}]^{\mathfrak{M}}(X)$ nicht definiert, falls X mehr als ein Element hat. Dies erscheint auch plausibel.

Man könnte sich nun mit diesem Resultat zufriedengeben und sagen, daß dann halt die obenstehenden Sätze keine Aussagen sind, weil sie weder wahr noch falsch sind. Dem stehen aber einige Einwände gegenüber. Der erste ist, daß dann die Frage, ob etwas eine Aussage ist oder nicht, nicht alleine eine Frage der Syntax ist sondern auch der realen Verhältnisse (dh in unserem Fall des Modells). Wäre nämlich anstelle der zwei grauen Katzen nur eine graue Katze in meinem Zimmer, dann wäre auf einmal sowohl (9.3) als auch (9.4) eine Aussage. Dieser Einwand ist allerdings nicht so gravierend, weil man ja mit dieser Tatsache durchaus leben kann, auch wenn sie einem nicht paßt. Der folgende Satz aber ist immer eine Aussage, egal wie die Verhältnisse sind:

(9.5) Wenn in meinem Zimmer genau eine graue Katze ist, so ist die graue Katze in meinem Zimmer fett.

Dieser Satz hat die Form wenn A so B, wo B gerade (9.3) ist. Nehmen wir nun an, es gibt zwei graue Katzen in meinem Zimmer. Dann ist A wahr und B — undefiniert. Wir schließen, daß dann eigentlich auch wenn A so B undefiniert sein müßte, was offensichtlich nicht der Fall ist. Offensichtlich ist also die Tatsache, daß ein Satz möglicherweise gar keine Aussage ist, nicht das Ende aller Tage. Wir müssen uns also ernsthaft darum kümmern, wie wir mit diesem Faktum umgehen sollen.

Bevor wir uns mit einer Lösung des geschilderten Problems auseinandersetzen, benötigen wir ein paar Begriffe.

Definition 9.1 *Es seien A und B Sätze. Wir sagen, A* ***präsupponiere*** *B, falls für jedes Modell $\mathfrak{M}$ gilt: ist A eine Aussage in $\mathfrak{M}$, so ist B wahr in $\mathfrak{M}$. B heiße* ***generische Präsupposition*** *von A, falls B Präsupposition von A ist und für jedes C, welches von A präsupponiert wird, gilt: aus B folgt C.*

Im Übrigen gilt für Sätze der Folgerungsbegriff von Definition 1.1 weiterhin, allerdings tritt jetzt das Modell anstelle der Belegung.

Definition 9.2 *Sei $\mathfrak{C}$ eine Menge von Sätzen und A ein Satz. A* ***folgt aus*** *$\mathfrak{C}$, in Zeichen $\mathfrak{C} \vdash A$, falls für jedes Modell $\mathfrak{M}$ gilt: ist jeder Satz aus $\mathfrak{C}$ wahr in $\mathfrak{M}$, so ist auch A wahr in $\mathfrak{M}$.*

Offensichtlich präsupponiert (9.3) den Satz

(9.6) Es gibt genau eine graue Katze in meinem Zimmer.

Man beachte, daß wir in der Definition von Sätzen sprechen, nicht von Aussagen. Insbesondere ist es gestattet, daß B auch ein Satz ist und nicht notwendig eine Aussage. Dies trifft auf (9.6) zu. Falls ich nämlich gar kein Zimmer habe, so ist (9.6) weder wahr noch falsch, das heißt, keine Aussage. Man kann leicht sehen, daß ein Satz genau dann eine Aussage ist, wenn er nur Tautologien präsupponiert.

Eine Präsupposition ist generisch für A, wenn sie die Verhältnisse, unter denen A eine Aussage ist, genau wiedergibt. Man zeigt nun leicht, daß je zwei generische Präsuppositionen wahrheitsäquivalent sind.

Satz 9.3 *Es seien B und C generische Präsuppositionen von A. Dann gilt sowohl $B \vdash C$ wie auch $C \vdash B$.*

Der Leser sei gewarnt, daß daraus jetzt nicht folgt, daß genau dann B wenn C eine Tautologie ist. Denn B und C dürfen durchaus Sätze sein und keine Aussagen, und dann ist nicht klar, was genau dann B wenn C bedeutet. Wir sprechen jedoch im Folgenden gerne von *der* generischen Präsupposition von A. Ferner sagen wir: ein Satz habe keine Präsupposition, wenn seine generische Präsupposition eine Tautologie ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn der Satz in jedem Modell eine Aussage ist.

Das Problem, mit dem nun fertig werden müssen, ist das sogenannte *Projektionsproblem*: eine Präsupposition eines Teilsatzes muß nicht unbedingt auf den gesamten Satz vererbt werden. Warum aber sollte das nicht der Fall sein? Dazu müssen wir den Begriff des *Kontextes* einführen. Ein **Kontext** ist schlicht eine Menge von Sätzen. Die Idee ist nun die, daß in einem gegebenen Text Sätze nicht unbedingt als alleinstehende Einheiten angesehen werden, die ausgewertet werden, komme was da wolle; sondern daß der Text jedem Satz einen Kontext zuordnet, in dem er interpretiert wird. In der zweiwertigen Logik macht das keinen Unterschied. Aber beim Thema Präsupposition wird alles anders. Der einfachste Fall eines Textes ist die bloße Reihung von Sätzen:

$$\mathsf{A}_1.\mathsf{A}_2.\ldots\mathsf{A}_n$$

In diesem Fall sagen wir, der Kontext von A_j sei die Menge $\{\mathsf{A}_i : i < j\}$. Insbesondere ist dann der Kontext von A_1 die leere Menge. Man kann den Punkt zwischen zwei Sätzen als und interpretieren. Dies macht eigentlich keinen Unterschied. Allerdings ist es sprachlich oft geboten, das und durch einen Punkt zu ersetzen oder umgekehrt. Betrachten wir nun den folgenden Text.

(9.7) Ich habe genau ein Zimmer.
In meinem Zimmer ist genau eine graue Katze.
Die graue Katze in meinem Zimmer ist fett.

Dieser Text ist etwas gestelzt, aber jedenfalls nicht unverständlich. Was wichtig ist: es gibt keinerlei Präsuppositionen mehr in diesem Text. Der Text ist immer eine Folge von Aussagen. Denn der erste Satz ist immer eine Aussage, er hat keine Präsupposition. Der zweite Satz nun präsupponiert den ersten; der erste ist sogar die eine generische Präsupposition des zweiten; aber er ist jetzt in dessen Kontext. Der dritte präsupponiert den zweiten, und dieser ist wiederum in seinem Kontext. Da der zweite Satz die generische Präsupposition des ersten ist, ist der Text als ganzes frei von jeder Präsupposition.

Wir sehen also, wie der Kontext Präsuppositionen blockieren kann. Dazu eine Definition.

Definition 9.4 *Es seien A, B Sätze und $\mathfrak{C}$ eine Menge von Sätzen. A* ***präsupponiert*** *B* ***im Kontext*** *$\mathfrak{C}$, falls gilt: ist $\mathfrak{C}$ wahr in $\mathfrak{M}$ und A eine Aussage in $\mathfrak{M}$, so ist B wahr in $\mathfrak{M}$. B ist* ***generische Präsupposition*** *für B* ***im Kontext*** *$\mathfrak{C}$, falls jede Präsupposition von A im Kontext $\mathfrak{C}$ aus B folgt.*

Alles hängt jetzt davon ab, wie der Kontext definiert wird. Dazu wird Folgendes vereinbahrt. Ein **Text** ist eine Folge $\langle A_i : i < n \rangle$ von Sätzen. Der Kontext von A_i ist $\{A_j : j < i\}$. Falls der Satz A und B im Kontext $\mathfrak{C}$ steht, so steht A im Kontext $\mathfrak{C}$ und B im Kontext $\mathfrak{C} \cup \{A\}$. Falls der Satz nicht A im Kontext $\mathfrak{C}$ steht, so ist $\mathfrak{C}$ auch der Kontext von A. Falls der Satz wenn A so B im Kontext $\mathfrak{C}$ steht, so ist $\mathfrak{C}$ der Kontext von A und $\mathfrak{C} \cup \{A\}$ der Kontext von B. Diese Regeln reichen aus, um zu erklären, daß wenn A die generische Präsupposition von B ist, so ist wenn A so B frei von jeder Präsupposition.

Es fällt auf, daß der Kontext von links nach rechts akkumuliert wird. [7] Es erscheint, als sei der Kontext lediglich eine Menge von Teilsätzen des Textes. Das ist aber nur eine Trugschluß. Denn der Grund, warum A zum Kontext von B in wenn A so B ist, ist intuitiv einfach: die Implikation lädt uns dazu ein, anzunehmen, daß A der Fall ist und sagt dann aus, daß B auch der Fall ist. Es ist also A im Kontext von B. Betrachten wir nun die Disjunktion, Wann ist A oder B wahr? Dazu müssen wir uns dabei beobachten, wie wir eine gewöhnliche Disjunktion auffassen. Eine Möglichkeit ist es, erst A zu betrachten. Ist A nicht der Fall, dann — so behauptet der Satz A oder B — ist B der Fall. Wir erwarten also, daß im Kontext von B nicht A, sondern gerade nicht A steht. Die generische Präsupposition von A oder B ist dann im Übrigen gleich wenn nicht A so C, sofern C die generische Präsupposition von B ist. Nun ist aber A oder B intuitiv nicht verschieden von B oder A. Dann ist also nicht B im Kontext von A. Ist dann D eine generische Präsupposition von A, so erwarten wir als generische Präsupposition von B oder A den Satz wenn nicht B so D. Welches ist nun der Fall? Betrachten wir (9.8).

(9.8) Meine Katze ist krank oder mein Hund ist krank.

Intuitiv präsupponiert dieser Satz sowohl, daß ich (genau) einen Hund und (genau) eine Katze habe. Aber die oben erwähnten Ansätze lassen erwarten, daß er präsupponiere, daß wenn ich nicht genau eine Katze habe, so wenigstens genau einen Hund, oder wenn nicht genau einen Hund, so wenigstens genau eine Katze. Man sieht schon: das Leben ist nicht so leicht.

Das Phänomen Präsupposition ist sehr weit verbreitet. Wenn ich sage, Karl wisse daß A, so präsupponiert dies nach allgemeiner Auffassung, daß A auch der Fall ist. Wenn ich eine Tatsache bereue, dann bin ich mir dieser Tatsache bewußt. Wenn ich sage, Paul sei ein Junggeselle, so präsupponiert

[7] Dies ist in der sogenannten dynamischen Semantik zum Prinzip erhoben worden. Jedoch wird man an diesem Modell einige Verfeinerungen vornehmen müssen. Unbestritten ist, daß die Dynamik des Kontexts ein unersetzliches Analysemittel geworden ist. Zum Beispiel wird man kaum das Phänomen der Anaphern erklären können, wenn man nicht den Kontext berücksichtigt. In welcher Weise man das tun muß, das ist allerdings genau das Problem.

das, daß Paul männlich sei und erwachsen. Worte, die kategorielle Beschränkungen auf ihre Argumente legen, erzeugen eine Präsupposition. So kann ich sagen, sehen benötigt ein lebendes Subjekt, also präsupponiert (9.9) (unter anderem) den Satz (9.10).

(9.9) Die Katze sieht die Maus.
(9.10) Die Katze ist ein lebendiges Wesen.

Wir beschließen die Ausführungen mit einem formalen Modell, in welchem Präsuppositionen und Kontexte integriert sind. Wir machen Aussagen zu Funktionen, welche Kontexte verlangen, und Aussagen liefern. Intuitiv liefert die Aussage A in dem Kontext $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ gerade die Aussage

$$\textsf{wenn } C_1 \textsf{ und } C_2 \textsf{ und } \ldots \textsf{ und } C_n \textsf{ dann } A$$

Alternativ dazu definieren wir für ein Modell $\mathfrak{M}$ eine Funktion $\{A\}^{\mathfrak{M}}$, welche Mengen von Sätzen in Wahrheitswerte abbildet (oder undefiniert ist). Ist A einfacher Satz, so sei $\{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) = 1$, falls in $\mathfrak{M}$ gilt: ist $\mathfrak{C}$ wahr, so ist $[A]^{\mathfrak{M}} = 1$. Ferner ist $\{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}) = 0$, falls in $\mathfrak{M}$ gilt: ist $\mathfrak{C}$ wahr, so ist $[A]^{\mathfrak{M}} = 0$. Andernfalls ist $\{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C})$ undefiniert (was wir mit $*$ notieren). Nun sei

$$\{A \textsf{ und } B\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) = 1 \\ & \qquad \text{und } \{B\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C} \cup \{A\}) = 1 \\ 0, & \text{falls } \{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) = 0 \\ & \qquad \text{oder } \{B\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C} \cup \{A\}) = 0 \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\{\textsf{wenn } A \textsf{ dann } B\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) = 0 \\ & \qquad \text{oder } \{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) = 1 \\ & \qquad\quad \text{und } \{B\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C} \cup \{A\}) = 1 \\ 0, & \text{falls } \{A\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) = 1 \\ & \qquad \text{und } \{B\}^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C} \cup \{A\}) = 0 \\ * & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Gewinn ist nun, daß diese Regeln voraussagen, daß wenn A so B keine Präsupposition hat, falls A keine Präsupposition hat und A die generische Präsupposition von B impliziert. Dazu müssen wir $\{\textsf{wenn } A \textsf{ so } B\}^{\mathfrak{M}}(\varnothing)$ ausrechnen. Es gilt nun nach Voraussetzung $\{A\}^{\mathfrak{M}}(\varnothing) \in \{0, 1\}$. Ferner ist $\{B\}^{\mathfrak{M}}(\{A\}) \in \{0, 1\}$. Denn falls A in $\mathfrak{M}$ wahr ist, so ist auch die generische Präsupposition von B wahr (nach Voraussetzung). Dann ist aber B eine Aussage, nach Definition von generischer Präsupposition. Aber falls A nicht in $\mathfrak{M}$ wahr ist, so ist $\{B\}^{\mathfrak{M}}(\{A\}) = 1$, nach Definition.

Übungen

Übung 41. Zeigen Sie: falls A B präsupponiert, und B C präsupponiert, so präsupponiert A auch C.

Übung 42. Nehmen wir an, ich bekomme wochenlang keine Post. Nun sage ich zu meinem Nachbarn:

(9.11) Entweder es gibt keine Briefträger mehr, oder die Briefträger sind im Streik.
(9.12) Falls es noch Briefträger gibt, so sind die Briefträger im Streik.
(9.13) Entweder die Briefträger sind im Streik, oder es gibt keine Briefträger mehr.
(9.14) Falls die Briefträger nicht im Streik sind, so gibt es keine Briefträger mehr.

Was sind die Präsuppositionen? Kommentieren Sie die Kontexttheorie dieses Kapitels in Bezug auf das letzte Beispiel.

Übung 43. Zeigen Sie, daß jeder Satz jede Tautologie präsupponiert. Zeigen Sie ferner, daß, A eine Aussage ist, falls die generische Präsupposition von A eine Tautologie ist.

Übung 44. Es sei B die generische Präsupposition von A. Dann ist die generische Präsupposition von A im Kontext $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ genau

wenn C_1 und C_2 und ... und C_n, dann B

Übung 45. Der folgende Satz hat eine distributive und eine nichtdistributive Lesart. Paraphrasieren Sie die Präsuppositionen, welche bei den jeweiligen Lesarten auftreten.

(9.15) Alle Schüler vergaßen die Hausaufgabe.

10 Zeit

Sätze verändern ihren Wahrheitswert mit der Zeit. Derselbe Satz kann in diesem Moment wahr sein und im nächsten Moment falsch. Daß ich jetzt sitze berechtigt nicht zu der Annahme, daß ich immer sitzen werde. Bisher haben wir aber der Zeitabhängigkeit von Wahrheitswerten keinen Raum gegeben. Dies wollen wir jetzt tun und gleichzeitig etwas einführen, was wir das *Koordinatensystem* nennen. Das Koordinatensystem enthält Angaben über die

Verankerung der Äußerung in die Wirklichkeit. Dazu gehören Angaben wie: wer ist der Sprecher, wo und wann wird die Äußerung gemacht? Diese Angaben sind sicher nötig, um Ausdrücke wie ich, hier und jetzt zu interpretieren. Allerdings werden wir gleich sehen, daß sie eigentlich fast immer erforderlich sind. Wir müssen nämlich der Tatsache Rechnung tragen, daß Sätze zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedenen Wahrheitswert haben. Dies tun wir auf denkbar einfachste Weise. Wir führen einen neuen Typ ein, den Typ des **Zeitpunkts**. Nennen wir ihn z. Zeitpunkte sind relle Zahlen. Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. Jeder Typ α wird jetzt umdefiniert zu einem Typ $z \to \alpha$, falls er zeitabhängig ist. Ist zum Beispiel schlafen ein Verb also vom Typ $e \to t$, so bekommt es jetzt den Typ $z \to (e \to t)$. Damit wird $[\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}$ eine Funktion, welche zu jedem Zeitpunkt eine (möglicherweise andere) Funktion vom Typ $e \to t$ auswirft. Wir nehmen dazu zu unserer Vereinfachung an, unser Universum sei unveränderlich. Jedes Ding exisiert also zu jedem Zeitpunkt. (Dies ist offensichtlich unrichtig, aber es macht das Leben etwas leichter. Eine Möglichkeit, dies zu korrigieren, ist, ein Prädikat existiert einzuführen, welches auf alle Dinge zutrifft, welche in dem gegebenen Moment existieren.) Nun betrachten wir den Satz

(10.1) Paul schläft.

Ist er nun wahr oder nicht? Dazu müssen wir erst einmal einen Zeitpunkt t wählen. Wir nennen t die **Zeitkoordinate** von (10.1). In Bezug auf die Zeitkoordinate ist (10.1) wahr, falls $[\mathsf{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}(t)(x_1) = 1$, wo x_1 die Bedeutung von Paul ist. Wir nehmen übrigens nicht an, daß sich die Bedeutung von Eigennamen mit der Zeit ändert. Insofern ist bezüglich des Satzes (10.1) alles Nötige gesagt. Der Zeitpunkt t wird üblicherweise der Zeitpunkt der Äußerung von (10.1) sein. Wenn ich also (10.1) zum Zeitpunkt t äußere, dann wird t die Koordinate von (10.1). Man beachte allerdings, daß das Verb nun als erstes die Zeitkoordinate als Argument verlangt. Insofern kann es mit dem Subjekt gar nicht in eine Konstituente zusammengehen. Wir haben also eher die folgende Struktur:

(10.2) Paul [t schläft]].

Hierbei ist t die Zeitkoordinate. Dies mag je nach syntaktischer Glaubensauffassung erwünscht sein; wir werden aber ohnehin eine andere Lösung als die eben gegebene vorschlagen. Bei der Gelegenheit kommen wir auf das angesprochene Problem zurück.

Wir können nun eine — wenn auch sehr einfache — Semantik der Zeiten entwerfen. Wie in Kapitel 5 erläutert, wollen wir schläft als Sequenz von Morphemen analysieren:

$$\text{schläft} = \text{schlaf}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{präs}{}^\frown\textsc{sg}$$

Wir lassen Singular und Plural hier jedoch aus dem Spiel. Die Bedeutung von Präsens (PRÄS), Vergangenheit (PRÄT) und Zukunft (FUT) ist wie folgt:

$$\begin{array}{lll} [\text{schlaf}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{präs}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) = 1 & \text{gdw} & [\text{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) = 1 \\ [\text{schlaf}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{prät}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) = 1 & \text{gdw} & [\text{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}(t')(x) = 1 \text{ für ein } t' < t \\ [\text{schlaf}^{\spadesuit}{}^\frown\textsc{fut}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) = 1 & \text{gdw} & [\text{schlaf}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}(t')(x) = 1 \text{ für ein } t' > t \end{array}$$

Wir merken an, daß das Futur im Gegensatz zur Vergangenheit analytisch gebildet wird mit Hilfe von werden. Wir werden jedoch solche Einzelheiten ignorieren. Es ist (10.3) nun wahr zum Zeitpunkt t, falls es einen Zeitpunkt $t' < t$ gibt, an dem (10.1) wahr ist; und (10.4) ist wahr zum Zeitpunkt t, falls es einen Zeitpunkt $t' > t$ gibt, zu dem (10.1) wahr ist.

(10.3) Paul schlief.
(10.4) Paul wird schlafen.

So weit ist die Sache recht übersichtlich.

Nun sind jedoch nahezu sämtliche Prädikate zeitabhängig. Ob etwas grau ist, schläfrig oder fleißig, ist offensichtlich zeitabhängig. Aber nicht nur Verben oder Adjektive, auch Nomina variieren in ihrer Bedeutung mit der Zeit. Ob jemand Präsident oder Kanzler ist oder Lehrer der Klasse 6a, alles dies hängt vom Zeitpunkt ab. Also sagen wir, die Bedeutung eines Nomens ist eine Funktion von Zeitpunkten in Garben über V. Sie haben also den Typ $z \to (e^\circ \to t)$, wo z den Typ der Zeitpunkte bezeichnet. Sehen wir uns also den folgenden Satz an.

(10.5) Der Präsident schläft.
(10.6) Der Präsident war ein schlechter Schüler.
(10.7) Der Präsident wird dereinst seine Memoiren schreiben.

(10.5) ist wahr zum Zeitpunkt t, falls, was immer zum Zeitpunkt t der Präsident ist, zum Zeitpunkt t schläft. (10.6) ist wahr in t, falls, welches x auch immer in t Präsident ist, zu einem früheren Zeitpunkt t', an dem x zur Schule ging, eine schlechter Schüler war. (10.6) ist wahr in t, falls, welches x auch immer in t Präsident ist, zu einem Zeitpunkt $t' > t$ seine Memoiren schreibt. Wichtig ist: in t' braucht x nicht Präsident zu sein. Das Tempus am Verb führt also nicht dazu, daß der Zeitpunkt der Prädikation für alle Satzteile verschoben wird. Falls man dies allerdings wünscht, so kann man dies mit Hilfe des Wortes damalig für die Vergangenheit und mit Hilfe von zukünftig im Falle der Zukunft erreichen. Ferner kann das Wort heutig benutzt werden, um klarzustellen, daß die Koordinate für das Nomen gerade *nicht* verschoben werden soll.

(10.8) Der damalige Präsident war ein gebildeter Mann.
(10.9) ? Der damalige Präsident war ein schlechter Schüler.
(10.10) Der zukünftige Präsident wird ein Sozialist sein.
(10.11) ? Der zukünftige Präsident wird abgewählt sein.

(10.9) und (10.11) sind deshalb merkwürdig, weil es schwerfällt, gleichzeitig Präsident und Schüler zu sein, oder gleichzeitig Präsident zu sein und abgewählt.

Die Semantik der Worte damalig, heutig und zukünftig ist allerdings problematisch, wenn man sich nur eines einzigen Zeitpunktes bedient. Als erster hat Reichenbach darauf aufmerksam gemacht, daß man für eine befriedigende Theorie der Zeiten zwei Zeitpunkte braucht: die **Referenzzeit** und die **Prädikationszeit** (von Reichenbach **Ereigniszeit** genannt). (Reichenbach benötigte sogar deren drei, denn er wollte auch die anderen Zeiten wie etwa das Plusquamperfekt und das Futur II behandeln.) Alle Prädikationen laufen dann in Bezug auf ein Paar von Zeitpunkten, von denen einer die Referenzzeit und der andere die Prädikationszeit bestimmt. Verben unterscheiden sich von Nomina unter anderem dadurch, daß sie sich an der Prädikationszeit orientieren, Nomina an der Referenzzeit. Daß bei Nomina (besonders wenn sie Objekte sind) aber beides möglich ist, zeigen folgende Beispiele.

(10.12) Der Präsident lernte den Minister während seiner Schulzeit kennen.

(10.12) kann bedeuten: x, welcher heute Präsident ist, lernte während seiner Schulzeit, zu einem Zeitpunkt t', y kennen, und y war in t' Minister. Oder aber: y ist heute Minister, und die beiden haben sich zu t' kennengelernt. (Hierbei gehen wir davon aus, daß seiner sich auf den Präsidenten bezieht. Die andere Lesart, wo sie sich auf den Minister bezieht, wäre auch noch denkbar.) Hier wirken die Wörtchen damalig und heutig desambiguierend. Nur die erste Lesart ist möglich bei (10.13). Nur die zweite bei (10.14).

(10.13) Der Präsident lernte den damaligen Minister während seiner Schulzeit kennen.
(10.14) Der Präsident lernte den heutigen Minister während seiner Schulzeit kennen.

Kommen wir auf den Ausgangspunkt zurück. Wir wollen eine Semantik, die Sätze der folgenden Art behandelt, wobei die Zeitabhängigkeit der Elemente berücksichtigt wird.

(10.15) Der Präsident frühstückt.
(10.16) Der Präsident frühstückte.
(10.17) Der Präsident wird frühstücken.

Dazu machen wir jetzt Verben, Nomina und Adjektive Zeitabhängig. Hatten sie also bisher den Typ α, so haben sie jetzt den Typ $z \to \alpha$. Also: intransitive Verben haben jetzt den Typ $z \to (e^\circ \to t)$, Nomina und Adjektive den Typ $z \to e^\circ$. Wie man sieht, kann man diese aber nicht wie bisher mittels Anwenden einer Funktion auf ein Argument kombinieren. Wir modifizieren also unsere Kombinationsregel wie folgt.

> Es seien A und B Konstituenten der Sprache L. Die Konstituente $[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]$ hat genau dann den semantischen Typ $z \to \alpha$, falls ein β existiert derart, daß gilt (i) A hat den Typ $z \to (\beta \to \alpha)$ und B den Typ $z \to \beta$ oder (ii) B hat den Typ $z \to (\beta \to \alpha)$ und A den Typ $z \to \beta$. Im Falle (i) ist
>
> $$[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}(t) := [\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}(t)([\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}(t))$$
>
> und im Falle (ii) ist
>
> $$[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}(t) := [\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}(t)([\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}(t))\ .$$

Diese Bedeutungsregel hat noch einige Schwächen (zum Beispiel ist nicht erklärt, was mit Eigennamen passiert, welche ja gar nicht zeitabhängig sind). Wir belassen es jedoch bei dieser Definition. Der Vollständigkeit halber formulieren wir auch die Modifikatorenregel.

> Sind A und B Konstituenten der Sprache L des Typs $z \to \alpha$ und kann A Modifikator der Konstituente B sein, so ist auch $[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]$ eine Konstituente vom semantischen Typ $z \to \alpha$, und es gilt
>
> $$[\mathsf{A}\ \mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}(t) := [\mathsf{A}]^{\mathfrak{M}}(t) \cap [\mathsf{B}]^{\mathfrak{M}}(t)$$

Die Elemente PRÄS, PRÄT und FUT haben jetzt den Typ

$$(z \to (e^\circ \to t)) \to (z \to (e^\circ \to t)) \ .$$

Ferner: ist f eine Funktion von Typ $z \to (e^\circ \to t)$, so seien f^p, f^v und f^f diejenigen Funktionen, für die gilt

$$\begin{array}{ll} f^p(t)(X) = 1 & \text{gdw es existiert ein } t' = t \text{ mit } f(t')(X) = 1 \\ f^v(t)(X) = 1 & \text{gdw es existiert ein } t' < t \text{ mit } f(t')(X) = 1 \\ f^f(t)(X) = 1 & \text{gdw es existiert ein } t' > t \text{ mit } f(t')(X) = 1 \end{array}$$

Endlich sei

$$\begin{array}{lcl} [\text{PRÄS}]^{\mathfrak{M}} & : & f \mapsto f^p \\ [\text{PRÄT}]^{\mathfrak{M}} & : & f \mapsto f^v \\ [\text{FUT}]^{\mathfrak{M}} & : & f \mapsto f^f \end{array}$$

Wenden wir uns (10.14) zu. Dies ist wahr zum Zeitpunkt t, falls

$$[\mathsf{frühstück}^{\spadesuit} {}^\frown \text{PAST}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) = 1 \ ,$$

wo x dasjenige x ist, für das

$$[\mathsf{Präsident}]^{\mathfrak{M}}(t) = \{x\} \ .$$

Nun ist

$$[\mathsf{frühstück}^{\spadesuit} {}^\frown \text{PAST}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) = 1$$

genau dann, wenn

$$([\mathsf{frühstück}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}})^v(t)(x) = 1 \ .$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $t' < t$ gibt derart, daß

$$[\mathsf{frühstück}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}}(t')(x) = 1 \ .$$

Also: (10.14) trifft zu zum Zeitpunkt t in $\mathfrak{M}$, wenn dasjenige x, welches zum Zeitpunkt t Präsident ist, zu einem früheren Zeitpunkt frühstückte. Ebenso ergeben sich für (10.15) und (10.17) die richtigen Ergebnisse.

Bei dieser Analyse wird also das Subjekt zur Referenzzeit gebildet und nicht zur Prädikationszeit. Dies liegt an der Art, wie die Kompositionsregel definiert ist. Die Referenzzeit ist wie ein Faden, der an die Teilkonstituenten weitergereicht wird. Dehnt man die Analyse auf transitive Verben aus, so wird man auch dort diejenige Lesart bekommmen, bei der das Objekt zur

Referenzzeit gebildet wird. Diese Analyse hat aber auch einige Schwächen. Zum Beispiel bleibt die Referenzzeit über die Satzgrenze erhalten (sie ist ja gleich der Äußerungszeit), was nicht erwünscht ist. Denn dann schreitet ein Text niemals in der ihm eigenen Zeit voran, sondern nur im Gleichklang mit der Äußerungszeit. Es bleibt dann nichts anderes übrig als sowohl Referenzzeit wie auch Prädikationszeit explizit zur Verfügung zu haben. Wir müßten dann so vorgehen. Wir ändern die Definition von Z. z steht dann für die Menge der Paare $\langle x, y\rangle$, wo x die Referenzzeit und y die Prädikationszeit ist. Die Kompositionsregel verkompliziert sich jetzt noch einmal, und wir müssen sorgfältig darüber buchführen, welcher Satzteil sich an der Referenzzeit orientiert und welcher an der Prädikationszeit. Ferner werden wir nicht umhinkönnen, auch noch deren Dynamik zu erfassen. Dies ist jedoch weit über dem, was wir hier vorführen können.

Übungen

Übung 46. Paraphrasieren Sie die Lesarten des folgenden Satzes.

(10.18) Vor zehn Jahren hatte der Mainzer Bischof mit dem Papst eine Auseinandersetzung.

Übung 47. Zeigen Sie, daß die folgenden Sätze nicht ambig sind.

(10.19) Paul und Sophie lernten sich während des letzten Schulfestes kennen.

(10.20) Paul war der Aufsichtsratsvorsitzende der XY Bank.

Was ergibt sich also für die Bedeutung des Wortes sein?

Übung 48. Es sei V ein Universum mit Urelementen x_1, x_2, x_3 und x_4. Ferner gebe es drei Zeitpunkte, t_1, t_2 und t_3, $t_1 < t_2 < t_3$. Schließlich sei

$$\begin{array}{ccc} & [\text{frühstück}^{\spadesuit}]^{\mathfrak{M}} & \\ t_1 & \mapsto & \{x_1, x_3\} \\ t_2 & \mapsto & \{x_1, x_4\} \\ t_3 & \mapsto & \{x_1\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & [\text{Präsident}]^{\mathfrak{M}} & \\ t_1 & \mapsto & \{x_1\} \\ t_2 & \mapsto & \{x_3\} \\ t_3 & \mapsto & \{x_1\} \end{array}$$

Berechnen Sie die Werte von (10.15) – (10.17) zum Zeitpunkt t_2.

Übung 49. Bestimmen Sie den Wahrheitswert in dem Modell aus der vorangegangen Aufgabe für folgende Sätze zum Zeitpunkt t_2.

(10.21) Der Ex–Präsident frühstückt.
(10.22) Der zukünftige Präsident frühstückt.
(10.23) Der Ex–Präsident ist auch der zukünftige Präsident.

Welche Funktion haben also die Worte Ex– und zukünftig?

ÜBUNG 50. Es sei es wird der Fall sein, daß S wahr zur Zeit t, falls ein $t' > t$ existiert derart, daß S wahr ist zur Zeit t'. Ebenso sei es war der Fall, daß S wahr zur Zeit t, falls ein $t' < t$ existiert derart, daß S wahr ist zur Zeit t'. Zeigen Sie, daß die Schlüsse von (10.24) auf (10.25) und (10.26) formal gültig sind, während jedoch der Schluß von (10.25) bzw (10.26) auf (10.24) nicht gültig ist. Ist das Ihrer Intuition nach gerechtfertigt?

(10.24) Hans liest.
(10.25) Es wird der Fall sein, daß Hans las.
(10.26) Es war der Fall, daß Hans lesen wird.

Hinweis. Es genügt zu zeigen: ist zu einem gegebenen Zeitpunkt t (10.24) wahr, so auch (10.25) bzw (10.26). Jedoch können letztere zum Zeitpunkt t wahr sein und der erste nicht.

11 Ort

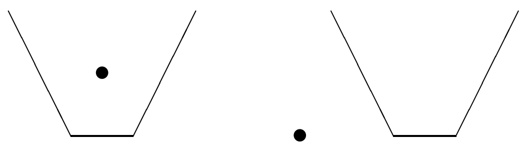
Konkrete Dinge haben nicht nur eine Zeit, in der sie existieren, sondern auch einen Ort. Ein Stuhl nimmt ein ganz bestimmtes Stück des Raumes ein, ebenso wie ein Auto. Dieses nennen wir seinen *Ort*. Der Ort ist veränderlich mit der Zeit. Orte, ebenso wie die Zeit, spielen im täglichen Umgang eine wichtige Rolle. Deswegen wollen wir uns mit ihnen beschäftigen. Wir nennen einen **Ort** eine Teilmengen des dreidimensionalen Anschauungsraumes; Orte werden also repräsentiert durch Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Wir nehmen an, daß wir in unserem Modell eine Funktion $[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}$ besitzen, welche zu jedem Zeitpunkt t und für jedes Urelement x eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auswirft, den Ort von x zum Zeitpunkt t. Diese Funktion wird nicht immer definiert sein. Es gibt Dinge, die keinen natürlichen Ort haben, zum Beispiel eine Theorie oder ein Gedanke. Allerdings können wir dennoch von einer 'Theorie in Amerika' sprechen, müssen uns aber darüber klar sein, daß wir damit nicht meinen, die Theorie sei in Amerika, sondern daß gewisse Leute in Amerika diese Theorie vertreten. Wir wollen uns hier lediglich mit dem natürlichen, das heißt, dem sinnlich erfahrbaren Ort eines Gegenstandes befassen.

Um zu sagen, ein Gegenstand sei irgendwo, können wir zum Beispiel äußern

(11.1) Das Buch ist auf dem Tisch.

(11.2) Das Fahrrad ist im Keller.

Dabei wird also ein Gegenstand in Relation zu einem anderen Gegenstand definiert. Dies ist nicht zufällig so. Wir erfahren Orte nicht als absolut gegeben (etwa durch Koordinaten in einem Koordinatenkreuz) sondern nur als durch Gegenstände geformt. Dementsprechend wird ein Ort mittels eines Gegenstandes (oder einer Gruppe) unter Zuhilfenahme einer Präposition gebildet. Wir nehmen aber dennoch an, die Präposition ermittele anhand des Gegenstandes einen Ort, dh eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Die Präposition in ist also eine Funktion $e \to o$, wo o den Typ des Ortes darstellt. Wir können diese wie folgt berechnen. Sei ein Gegenstand, x, gegeben (etwa eine Salatschüssel). Der Ort, den x einnimmt, ist schlicht der Ort, wo Glas ist. Man muß nur diesen Ort kennen, um zu wissen, wo man 'in' der Schüssel ist. Allein die Form der Schüssel ist also ausschlaggebend, nichts sonst. Wir sagen zum Beispiel, daß in dem ersten Bild die Kugel in der Schüssel sei, und im zweiten neben der Schüssel.



Also sagen wir: es gibt eine Funktion IN, welche zu jedem Ort $\mathfrak{p}$ einen Ort $\mathfrak{q}$ liefert. Sie ist also vom Typ $o \to o$. Die Bedeutung von in ist dann zu einem Zeitpunkt t gegeben durch:

$$[\mathsf{in}]^{\mathfrak{M}}(t) : e \to o : x \mapsto IN([\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(t)(x))$$

Ein Gegenstand x ist nun zum Zeitpunkt t in einem Gegenstand y, falls der Ort von x in dem Ort von $IN([\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(t)(y)$ enthalten ist. Man beachte, daß der Ort eines Gegenstandes zeitabhängig sind. Wir haben also insgesamt für in den Typ $z \to (e \to o)$. Analog kann man mit den Präpositionen an, unter und über umgehen, um ein paar Beispiele zu nennen. Die Phrasen in der Schüssel, über dem Haus können adverbial, prädikativ wie auch attributiv gebraucht werden. In ihrer attributiven Verwendung sind sie wie Adjektive zu handhaben. Mit der im vorigen Kapitel formulierten Modifikatorenregel bekommen wir das erwünschte Resultat. Betrachten wir etwa

(11.3) der Schlüssel im Auto

(11.3) bezeichnet zur Zeit t dasjenige x, welches zur Zeit t ein Schlüssel ist und das sich zur Zeit t in dem Auto befindet. Dieser Ausdruck ist zur Zeit t undefiniert, wenn es mehrere Gegenstände gibt (oder gar keinen), welche Schlüssel sind zur Zeit t und sich im Auto in t befinden.

Es ist nun keineswegs klar, wann man für einen gegebenen Ort eine bestimmte Präposition setzen muß. Im Falle einer Schüssel ist es sicher klar, wann man 'in' ihr ist. Dazu muß sich man nur die Schüssel ansehen. Bei einem Schiff ist das anders. Bin ich unter Deck, so bin ich immer noch 'auf' dem Schiff. Sage ich etwa, daß ich 'im' Schiff sei, so betone ich die rein physikalische Seite; falls ich mich neutral ausdrücken möchte, so sage ich, ich sei 'auf' dem Schiff. Bei einem Zug ist es wieder anders. Wir sagen, wir seien 'im' Zug sowohl, wenn wir auf ganz normale Weise im Zug sind wie auch, wenn wir physikalisch gesehen darin sind. Sagen wir, wir seien 'auf' dem Zug, wird man uns für leicht lebensmüde halten. Noch ein Beispiel. Wir sind 'auf' dem Feld, aber 'im' Garten. Warum ist das so? Es ist sicher keineswegs nur die bloße Lage der Dinge zueinander, welche uns sagt, welche Präposition wir setzen müssen, sondern wir müssen dazu oft noch wissen, von welcher Art Gegenstand die Rede ist.

Wir müssen nun klären, was der Ort einer Gruppe bzw einer Garbe ist. Bei Garben ist das Leben leicht. Ist $\mathbb{X}$ eine Garbe, so sei $[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{m}}(\mathbb{X})$ ebenfalls eine Garbe, nämlich die Garbe der Einzelorte. Wr setzen also

$$[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(\mathbb{X}) := \{[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(x) : x \in \mathbb{X}\}$$

Wir würden naiverweise zunächst vermuten, daß der Ort einer Gruppe schlicht die Vereinigung der Orte ihrer Mitglieder ist. Nennen wir dies den kumulativen Ort der Gruppe. Dies ist jedoch nicht immer die richtige Analyse. Dazu ein Beispiel.

(11.4) In diesen Schachteln ist ein Nagel.
(11.5) In diesen Schachteln ist je ein Nagel.

Wie uns (11.5) lehrt, müssen wir annehmen, der Ort einer Gruppe (in diesem Fall die Gruppe der Schachteln) ist nicht ein einziger Ort, sondern eine Gruppe von Orten. Ansonsten ist nicht klar, wie man die Nägel verteilen soll. Man könnte geneigt sein zu sagen, daß ja die Orte jeweils keine Überschneidungen zulassen, sodaß sich aus dem gesamten Ort, welchen die Schachteln zusammen bilden, die Einzelorte herauslesen lassen. Wir erlauben jedoch der Semantik nicht, derart intelligent zu sein. Dies hieße ja, Wissen über das Wesen von Schachteln hineinzustecken. Deen Kreise können sich zum Beispiel überlappen. Man kann dies auch sprachlich manifest machen. Ein Land ist nicht immer zusammenhängend (zum Beispiel Indonesien). Ferner kann man wohl kaum anhand der Karte Europas die Länder identifizieren. Wie also soll man (11.6) richtig interpretieren können, wenn man nur die gesamte Landmasse kennt, nicht aber die Einteilung in Länder?

(11.6) In den Ländern Europas findet je eine Konferenz zum Thema Subsidiarität statt.

Wir schließen also, daß es in (11.5) besser ist, der Gruppe anstelle des kumulativen Ortes die Gruppe der Orte ihrer Elemente zuzuweisen. Wir setzen also für eine Gruppe X:

$$[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(t)(X) := \{[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(t)(x) : x \in X\}$$

Jetzt entspricht (11.5) einfach nur der distributiven Lesart, in der jedem Einzelort ein Nagel zugewiesen ist. Die Interpretation von (11.5) ist jetzt wie folgt. Für jedes Element S aus der Gruppe der Sachteln existiert ein Element n der Gruppe der Nägel derart, daß der Ort von n enthalten ist in dem Ort von S, in Zeichen

$$[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(t)(n) \subseteq [\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}(t)(S) .$$

Gehen wir nun zu (11.4) über. Falls wir bei der Analyse bleiben, müssen wir jetzt sagen, was es heißt, daß ein Gegenstand in einer Gruppe von Orten ist. Dazu gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Die strenge Variante ist zu verlangen, daß der Gegenstand in einem Einzelort enthalten sei. Die mildere Variante ist zu verlangen, daß der Gegenstand lediglich in dem kumulativen Ort aller Mitglieder der Gruppe vorhanden ist. In der ersten Variante ist ein Nagel in einer Gruppe von Schachteln nur dann, wenn er sich ganz in einer Schachtel befindet. In der zweiten Variante ist ein Nagel in einer Gruppe von Schachteln, sobald er mit jedem seiner Teile in irgendeiner einer Schachtel ist. Dies bedeutet: stimmen wir (11.7) zu, so auch (11.8).

(11.7) Der Nagel ist teilweise in der einen und teilweise in der anderen Schachtel.

(11.8) Der Nagel ist in den beiden Schachteln.

Meines Erachtens ist das in Ordnung. Wir erlauben es also, daß der Ort einer Gruppe schlicht die Vereinigung der Orte ihrer Mitglieder ist.

Eine ganze Reihe von Verben beschreiben eine Ortsveränderung, etwa gehen, fahren, rollen. Betrachten wir sie in ihrem intransitiven Gebrauch. Dann haben sie ein Subjekt, das seinen Ort im Laufe der Handlung ändert. Damit dies möglich ist, müssen wir annehmen, die von diesen Verben bezeichnete Handlung benötige eine gewisse Zeit und sei nicht nur punktuell. Dann können wir insbesondere zwei Orte ausmachen: den Ort des Subjekts zu Beginn der Handlung und seinen Ort am Ende der Handlung. Dies nennen wir die **Quelle** und das **Ziel** der Bewegung. In (11.9) ist der Bahnhof die Quelle und der Kiosk das Ziel der Bewegung von Jan.

(11.9) Jan rannte vom Bahnhof zum Kiosk.

Ferner gibt es noch eine dritte Art von Ort, einen, der nur zeitweise eingenommen wird. In (11.10) ist die Polizei nicht am Anfang noch am Ende der Handlung im Tunnel, sondern nur in einem Zeitabschnitt dazwischen.

(11.10) Die Polizei fuhr durch den Tunnel.

Es stellt sich nun heraus, daß in der Sprache die Präposition nicht bloß den Ort bezeichnet, sondern gleichzeitig angibt, an welcher Stelle des Ereignisses der Gegenstand an diesem Orte zu finden ist. Als Beispiel mögen die folgenden Sätze dienen.

(11.11) Ich bin im Tunnel.
(11.12) Ich gehe in den Tunnel.
(11.13) Ich fahre durch den Tunnel.
(11.14) Ich komme aus dem Tunnel heraus.

Hierbei wird stets derselbe Ort ausgezeichnet: nämlich das Innere des Tunnels. Aber in den verschiedenen Szenarien befinde ich mich zu verschiedener Zeit in diesem Ort; dauernd in (11.11), am Ende in (11.12), am Anfang in (11.14) und zwischendrin in (11.13).

Eine Präposition besteht demnach aus zwei Komponenten. Die eine nennen wir den Konfigurierer und die andere den Modus. Ein **Konfigurierer** ist eine Funktion, wie wir sie eingangs betrachtet haben. Sie nimmt einen Gegenstand und wirft den Ort dieses Gegenstands zu einer bestimmten Zeit aus. Zum Beispiel ist die oben beschriebene Funktion in ein Konfigurierer. Andere Beispiele sind auf, vor, hinter usw. Wie schon eingangs beschrieben, dienen sie dazu, einen Ort in Relation zu einem oder mehreren gegebenen Objekten zu definieren. Dazu kommt jetzt aber noch die Tatsache, daß bei einigen Verben sich der Ort des Subjekts ändern kann. Dort müssen wir zusätzlich noch vom Modus reden. Lokative gibt es in vier Modi. Wir nennen sie den **statischen**, **coinitialen**, **cofinalen** und den **transitorischen** Modus. (Es gibt noch weitere Modi, aber wir wollen es bei diesen vier bewenden lassen.) Im coinitialen Modus bezeichnet der Lokativausdruck die Quelle, im cofinalen das Ziel and im transitorischen einen intermediären Ort des bewegenden Subjekts. Als viertes kommt der statische Modus hinzu, wenn das Subjekt seinen Ort während der Handlung nicht ändert. Ist ein Lokativ nicht statisch, so heißt er auch **direktional**. Man beachte, daß auf der einen Seite die Funktion in wie oben definiert ein Konfigurierer ist, auf der anderen Seite aber eine Präposition im statischen Modus.

Betrachten wir also nochmals die Beispiel (11.11) – (11.14). In jedem dieser vier Beispiele ist von ein und demselben Ort die Rede (das Innere des Tunnels). Jedoch kann ich dies als statischen Lokativ ((11.11)), als cofinalen Lokativ ((11.12)), als transitorischen Lokativ ((11.13)) und als coinitialen Lokativ ((11.14)) verwenden. Man muß die bloße Ortsangabe von der Art der Ortsveränderung unterscheiden. In manchen Sprachen (zB im Finnischen) gibt es zu einer Konfiguration drei Modi, den cofinalen, den coinitialen und den statischen Modus, in einigen Sprachen gibt es sogar alle vier. Es ist keineswegs so, daß Verben der Bewegung nur mit direktionalen Lokativen konstruiert werden müssen. Ferner können alle vier Lokative auf einmal in einem Satz vorkommen.

(11.15) Martin ging auf dem Dach spazieren.
(11.16) Hermine fuhr auf der Landstraße von Stuttgart durch Reutlingen nach Tübingen.

Wie oben schon bemerkt, muß man für eine Gruppe als Subjekt auch Gruppen von Orten erlauben, und in der Tat können Lokative in allen Modi mit Gruppen so konstruiert werden, daß sich die Orte (Quelle, Ziel etc) auf die jeweiligen Gruppen mitglieder verteilen.

(11.17) Die Konferenzteilnehmer kommen aus Europa und den USA.
(11.18) Die Mitglieder des Orchesters wohnen in verschiedenen Hotels.
(11.19) Die Reisegruppen fuhren durch unterschiedliche Landschaften.

Bei transitiven Verben kommt nun noch ein besonderes Faktum hinzu, nämlich daß der Lokativ im Prinzip sowohl den Ort des Subjektes wie des Objektes bezeichnen kann. Jedoch ist man in der Wahl in der Regel nicht frei. In den folgenden Beispielen ist es immer das Objekt, das sich bewegt, nicht das Subjekt.

(11.20) Herbert rollte den Stein den Abhang hinunter.
(11.21) Paul schubste Stefan vom Sessel.
(11.22) Dieter warf den Stein ins Fenster.

In vielen anderen Beispielen ist das Subjekt mit dem bewegten Objekt so verbunden, daß es sich mit ihm mitbewegt. Wenn ich ein Flugzeug nach Kuala Lumpur geflogen habe, dann war ich am Ende offenkundig auch in Kuala Lumpur, denn ich saß ja im Flugzeug drin. Aber das ist durchaus nicht zwingend; ich hätte das Flugzeug auch fernsteuern können. Ebenso mit vielen anderen Verben. Dies betrifft allerdings nur deren transitiven Gebrauch. Falls ich nämlich sage, daß ich nach Kuala Lumpur geflogen bin, so bin ich gewiß selber dort auch angekommen.

Übungen

Übung 51. Viele Präpositionen im Deutschen können alternativ den Akkusativ verlangen oder den Dativ (auf, in, unter). Wie unterscheiden sich die Bedeutungen? Formulieren Sie die Bedingungen, unter denen der Akkusativ gesetzt werden muß, und unter denen der Dativ gesetzt werden muß.

Übung 52. Bestimmen Sie die verschiedenen Lesarten der folgenden Sätze. Welche erscheint Ihnen bevorzugt?

(11.23) In allen Ländern Europas befinden sich zwei Bodenschätze.
(11.24) Alle Bodenschätze befinden sich in zwei Ländern Europas.

Übung 53. Diskutieren Sie die folgenden Fakten.

(11.25) Gernot nahm eine Flasche aus dem Kühlschrank.
(11.26) *Gernot nahm eine Flasche in den Külschrank.
(11.27) *Gernot stellte eine Flasche aus dem Kühlschrank.
(11.28) Gernot stellte eine Flasche in den Kühlschrank.

Übung 54. Bestimmen Sie den Unterschied zwischen (11.29) und (11.30). Was kann man über das Verb anrufen sagen? Gibt es ähnliche Verben diesen Typs? *Hinweis.* Anrufen ist selbstverständlich kein Verb der Bewegung.

(11.29) Paul rief Sophie aus London an.
(11.30) Paul rief Sophie in London an.

Übung 55. Diskutieren Sie den folgenden Kontrast.

(11.31) *Die Träger stellten drei Klaviere in vier Zimmer.
(11.32) Die Träger stellten je drei Klaviere in vier Zimmer.

12 Ereignisse I

Wir haben uns bisher überwiegend mit der Semantik der Nomina befaßt. Dies ist der Tatsache geschuldet, daß die Bedeutungen von Nomina zumindest auf den ersten Blick leicht faßbare Dinge sind, während man sich bei den Bedeutungen von Verben schwerer tut. Was soll zum Beispiel konkret die Bedeutung von schenken sein? Offenkundig ist schenken eine *Handlung*, also etwas, das sich in der Zeit vollzieht. In dieser Handlung gibt es gewisse Mitspieler, einen, den wir den *Geber* nennen, einen, den wir *Empfänger* nennen, und etwas, das gegeben wird, und das wir *Geschenk* nennen. Während einer gewissen Zeit tun die Akteure gewisse Dinge, welche die Handlung des Gebens konstitutieren und dem einen Mitspieler den Status des Gebers gibt, dem anderen den Status des Empfängers und einer bestimmten Sache den Status des Geschenks. Es ist nun in gewissem Maße unerheblich, ob nebenbei noch andere Dinge ablaufen. So kann Paul Sophie ein Buch schenken, während er andächtig einer Mozartsymphonie lauscht. Dazu reicht ein bloßes Zeigen mit dem Fingen auf etwas, das verdächtig in Papier eingewickelt ist. So treten in einem Zeitabschnitt viele Ereignisse miteinander in Konkurrenz. Jedoch wollen wir in dem eben beschriebenen Szenario sagen, daß die konstitutierenden Elemente des Schenkens und des andächtig Lauschens verschieden sind. Das Zeigen mit dem Finger konstituiert das Ereignis des Schenkens, aber nicht das des Lauschens. Es kann allerdings so sein, daß dieselbe Geste verschiedene Ereignisse konstituiert. Etwa kann ich mit einer Geste meinem Nachbar in der Schule einen Fleck an der Decke zeigen und gleichzeitig mich melden. Man kann die Bedeutungen von Handlungen mit Rezepten vergleichen. Sie nennen eine gewisse Anzahl Prärequisiten und sagen dann, wie's gemacht wird. Wichtig ist, daß die Handlungen nur in der Zeit existieren. Zu keinem Zeitpunkt existiert die Handlung meines Gehens, sondern die Handlung existiert nur in einem Intervall, so klein es auch sein mag. Denn der Zeitpunkt ist eine Photographie: die bloße Körperhaltung, die ich zu einem Moment habe, zeigt nicht, daß ich gehe, auch wenn es so aussehen mag. Aber in einem gewissen Zeitintervall kann es sich offenbaren. In diesem Sinne begegnet man wieder Zeno's Paradox von der Zeit als Abfolge von Momentbildern.

Jedoch haben einige Semantiker, darunter Davidson und Parsons, vorgeschlagen, daß nicht nur Nomina sondern auch Verben Dinge bedeuten sollen. Diese Dinge nennen sie **Ereignisse**. Die Motive zur Einführung von Ereignissen sind sowohl syntaktischer wie semantischer Natur. Wir wollen mit einem semantischen Problem beginnen. Betrachten wir folgende Aussagen.

(12.1) Hans sieht, daß Sophie ein Bild malt.
(12.2) Hans sieht, wie Sophie ein Bild malt.

In (12.1) können wir sagen, was Hans sieht, ist ein bestimmter Sachverhalt, nämlich die Tatsache, daß Sophie ein Bild malt. Auch wenn diese Analyse anfechtbar ist, belassen wir es dabei. In (12.2) jedenfalls ist es bestimmt anders. Hans kann sehen, *wie* Sophie ein Bild malt, ohne zu realisieren, *daß* es so ist. Dies bedeutet: was Hans in (12.2) wahrnimmt, ist das Ereignis als solches und nicht sein faktisches Bestehen. Meine Katze kann beobachten, wie ich am Computer Texte verfasse, ohne wahrzunehmen, daß ich am Computer Texte verfasse. Das, was Hans in (12.2) wahrnimmt, das nennen wir ein **Ereignis**. Diese Ereignisse sind für die Semantik *Dinge*, das heißt, keine Funktionen. Die Folgen dieses Unterschieds werden uns noch beschäftigen. Wir weisen aber darauf hin, daß wir Verben bisher keinen ontologischen Status eingeräumt haben. Wir haben sorgsam Dinge von Funktionen unterschieden. Das bedeutete insbesondere, daß man über Verbbedeutungen nicht quantifizieren konnte. Das mag entbehrlich scheinen. Man muß aber bedenken, daß viele Nomina aus Verben entstanden sind, etwa Reise, Wahrnehmung, Benehmen usw. Ferner sind Gerundien Nomina oder Adjektive. Welches ist dann ihre Bedeutung? Falls wir Ereignisse haben, wird die Frage leicht beantwortbar sein: ihre Bedeutung ist schlicht das Ereignis selbst. Meine Reise in den Himalaya ist dann das Ereignis, wo ich in den Himalaya fahre, meine Wahrnehmung einer grauen Katze ist das Ereignis, wo ich eine graue Katze wahrnehme usw. Ereignisse sind also ein Weg, um solchen Nomina eine Semantik zu geben. Allerdings werden wir noch klären müssen, inwiefern sich nun die Semantik der ursprünglichen Verben von der der zugeordneten Nomina unterscheidet.

Betrachten wir ein anderes Problem, nämlich die Tatsache, daß ein und dasselbe Verb mit verschiedenen Valenzen auftreten kann. Zum Beispiel können transitive Verben oft auch intransitiv gebraucht werden. Etwa das Verb essen.

(12.3) Ich esse ein Stück Käse.
(12.4) Ich esse.

Ich kann also ein Stück Käse essen, oder schlicht essen. Wenn ich esse, dann gibt es natürlich etwas, das ich esse. Insofern ist es für das Ereignis des Essens durchaus konstitutiv, daß etwas gegessen wird. Nur muß ich dieses Objekt nicht erwähnen; ich kann (12.4) stattdessen äußern. Dies kann man in der Prädikatenlogik noch bewältigen, indem man das nicht erwähnte Objekt einfach wegquantifiziert. Oft kann man aber auch die Valenz von Verben erhöhen, zum Beispiel durch Zufügung einer Person, die von der Handlung profitiert.

(12.5) Sophie malte für Paul ein Bild.

Ist malen schlicht ein transitives Verb, so haben wir in der Prädikatenlogik keinen Platz für extra Argumente. Was sollen wir also tun? Ereignisse können hier helfen. Wir sagen, eine Handlung e, in welcher zwei Dinge vorhanden sind, x (Sophie) und y (ein Bild), und in der x in der gegebenen Handlung y malt, sei ein Ereignis des Malens. Wir schreiben dafür kurz und bündig $\mathsf{malen}'(e)$ und sagen, e sei ein **Mal–Ereignis**. Man beachte: wir haben hier nicht erklärt, was nun eigentlich das Malen ist. Wir wollen dies auch nicht tun; das kann man mit logischen Hilfsmitteln auch gar nicht bewältigen. Wir belassen es mit dem Hinweis, daß so, wie wir in der Tat einen Stuhl erkennen können, wenn wir einen sehen und doch keine kohärente Definition abgeben können, was ein Stuhl ist, so erkennen wir auch, ob etwas ein Mal–Ereignis ist, wenn wir es sehen, ohne daß wir genau sagen könnten, was genau ein Mal–Ereignis ist. In einem Mal–Ereignis gibt es aber sicher ein Ding, das agiert (hier Sophie) und etwas, das bearbeitet wird (hier das Bild). Wir nennen allgemein die treibende Kraft in einer Handlung den **Aktor** oder das **Agens** und den zentralen Gegenstand das **Thema**. Wir nehmen also an, wir haben partielle Funktionen agens' und thema', mit welchen wir zu einem gegebenen Ereignis den Aktor (sofern existent) und das Thema (sofern existent) bekommen. Nun kommt der Clou: es gibt nun auch solche Mal–Ereignisse, bei denen sich der Aktor jemanden als Begünstigten denkt. Er oder sie plant zum Beispiel, den Gegenstand dem Begünstigten zu schenken. In solchen Ereignissen sagen wir, es gibt einen **Benefizienten**, zu Deutsch: einen **Begünstigten**. Technisch realisieren wir dies durch eine Funktion namens ben'. Die Funktion ben' ist also definiert, falls Sophie sich jemanden als Begünstigten vorstellt. Falls Sophie einfach nur so malt und sich nicht überlegt, wem sie das Bild schenken möchte, so ist die Funktion ben' nicht definiert. Wir sehen an diesem Beispiel, daß die Reifizierung von Ereignissen durchaus handfeste Vorzüge hat.

Wir geben die Übersetzung des Beispiels (12.5) in die logische Sprache mit Ereignissen an. Lassen wir die Zeit momentan aus dem Spiel.

(12.5′) $(\exists e)(\exists x)(\mathsf{agens}'(e) \doteq \mathsf{Sophie}' \wedge \mathsf{thema}'(e) \doteq y \wedge \mathsf{bild}'(x) \wedge$
$\mathsf{ben}'(e) \doteq \mathsf{Paul}')$

(Die Striche erinnern uns, daß die umgangssprachlichen Ausdrücke nicht die unserer Sprache sind, sondern deren Korrelate in einer formalen Sprache.) Wenn wir dies so formalisieren, können wir sehen, daß bestimmte Inferenzen aus rein logischen Gründen richtig sind. Ein Beispiel ist der Schluß von (12.5) auf (12.6) oder (12.7).

(12.6) Sophie malte ein Bild.
(12.7) Sophie malte.

Machen wir uns klar, warum. (12.5) sagt, daß es ein Ereignis des Malens gab, dessen Agens Sophie ist, dessen Benefizient Paul, und dessen Thema ein Bild. Wenn dem so ist, so hat es auch ein Ereignis des Malens gegeben (das nämliche), in welchem Sophie das Agens und ein Bild das Thema ist. Dies ist, was (12.6) sagt. Ferner hat es dann auch ein Ereignis des Malens gegeben, in dem Sophie das Agens ist. Und dies sagt gerade (12.7).

Fassen wir zusammen: die Bedeutungen von Verben sind Ereignisse. Ereignisse haben bestimmte Mispieler, welche durch gewisse Handlungen das Ereignis konstitutieren. Technisch bekommen wir diese Mitspieler durch gewisse Funktionen geliefert. In der syntaktischen Literatur nennt man die Funktionen Agens, Thema usw θ–Rollen. Hierbei steht 'θ' für 'thematisch'. Je nach Theorie gibt es verschiedene θ–Rollen. Wir listen hier einige auf.

Agens, Thema, Ziel, Benefizient, Wahrnehmer, Ort

Es fällt auf, daß θ–Rollen über die Form ihrer Beteiligung an dem Ereignis definiert sind. Die Definition ist also inhärent semantisch (einige würden sagen, kognitiv) und gewiß nicht syntaktisch. Trotzdem haben θ–Rollen auch etwas mit der Syntax zu tun. Man weiß zum Beispiel, daß ein Agens mit hoher Wahrscheinlichkeit als Subjekt realisiert ist (sofern wir im Aktiv, dh im unmarkierten Genus Verbi sind). θ–Rollen liegen also auf der Schnittstelle zwischen Syntax und Semantik. Offensichtlich haben die θ–Rollen etwas mit den realisierten Argumenten eines Verbs zu tun. Auf der anderen Seite ist die Zuordnung zwischen grammatischen Funktionen und θ–Rollen alles andere als eindeutig. Zum Beispiel ist das Subjekt nicht notwendig ein Agens, nicht einmal in einem transitiven Satz.

(12.8) Hans sieht einen grünen Baum.
(12.9) Hans glaubt, daß die Erde eine Scheibe ist.

In den beiden Sätzen ist Hans nicht der Aktor; es gibt nichts, was Hans wirklich tut. Wir nennen daher Hans den **Wahrnehmer**. Wir wollen dies jedoch nicht vertiefen.

Kommen wir zu den Ereignissen zurück. Die Vorzüge von Ereignissen lassen sich an zwei anderen Stellen auch noch sichtbar machen: bei der Zeit und dem Ort. Wir können einfach sagen, ein Ereignis finde zu der oder der Zeit statt und an dem und dem Ort. Technisch können wir dies tun, indem wir zwei Funktionen benennen, zeit' und ort', welche zu jedem Ereignis seine Zeit (ein Zeitinterval) und seinen Ort liefern. Die Sätze (12.10) – (12.12) werden dann durch (12.10′) – (12.12′) wiedergegeben. Hierbei ist t einfach als freie Variable belassen.

(12.10) Der Präsident frühstückt.
(12.10′) $(\exists e)(\mathsf{frühstück}'(e) \wedge t \in \mathsf{zeit}'(e) \wedge \mathsf{agens}'(e) \doteq x \wedge \mathsf{präsident}'(t)(x))$
(12.11) Der Präsident frühstückte.
(12.11′) $(\exists e)(\mathsf{frühstück}'(e) \wedge \mathsf{zeit}'(e) < t \wedge \mathsf{agens}'(e) \doteq x \wedge \mathsf{präsident}'(t)(x))$
(12.12) Der Präsident wird frühstücken.
(12.12′) $(\exists e)(\mathsf{frühstück}'(e) \wedge t < \mathsf{zeit}'(e) \wedge \mathsf{agens}'(e) \doteq x \wedge \mathsf{präsident}'(t)(x))$

(Wir schreiben $I < t$ für ein Interval, falls alle Zeitpunkte von I vor t liegen; I ist also noch vor t zu Ende. Analog $t < I$.) Entsprechend können wir die Bedeutung von Ortsangaben in die Semantik inkorporieren. Wir wollen dies jedoch nicht tun.

Ereignisse sind von verschiedener Art. Die Klassifizierung erfolgt im allgemeinen nach der sogenannten *Aktionsart*, ein Begriff, der von Vendler stammt. Die Aktionsart spezifiert die Art, wie sich das Ereignis in der Zeit entwickelt. Es gibt drei Kriterien für die Einteilung: danach, ob ein Ereignis *statisch* ist, ob es *telisch* ist oder ob es *punktuell* ist. Die Terminologie für Ereignisse ist alles andere als kohärent und wechselt von Autor zu Autor. Der erste Typ Ereignisse sind die sogenannten **Zustände**. Zustände können eigentlich nicht als Handlungen betrachtet werden. Beispiele sind:

(12.13) Diese Wand ist weiß.
(12.14) Hans weiß, daß Herbert nach Wien fährt.

Wenn eine Wand weiß ist, so liegt einfach eine Tatsache vor, genauso, wenn

Hans etwas weiß. Charakteristisch für Zustände ist unter anderem, daß keinerlei Veränderung stattfindet. Ein Zustand ist so oder nicht so. Zustände sind also statisch. Alle anderen Ereignisse sind dagegen nicht statisch. Von Zuständen muß man **Prozesse** oder **Vorgänge** unterscheiden. Ein Prozeß ist eine kontinuierlich ablaufende Veränderung. Beispiele sind

(12.15) Die Kontinente driften auseinander.
(12.16) Hans läuft auf der Straße.

Prozesse beinhalten eine Veränderung sei es, daß sich jemand oder etwas bewegt, sei es, daß etwas seine Gestalt ändert, sei es, daß etwas geformt oder vernichtet wird. Wichtig ist hier, daß Prozesse nicht zielgerichtet sind. Man sagt, sie seien *atelisch*. Daraus folgt unter anderem, daß man sie an jeder Stelle abbrechen kann. Wenn Hans zwischen 2 und 3 Uhr läuft, und ich sehe um 2 Uhr 15, wie er läuft, so ist gewiß, daß es Lauf–Ereignis gab mit Hans als Läufer. Es ist dabei unerheblich, wie lang dieses Ereignis andauerte. Ich muß es nicht bis zu Ende beobachten.

Die prototypischen Ereignisse sind jedoch von einer dritten Art, welche wir eine **Handlung** nennen wollen. Eine Handlung geht stets auf ein bestimmtes Ziel hin. Dieses kann in einem Moment oder allmählich erreicht werden. Man spricht deshalb bei letzteren auch von **telischen** Ereignissen. Dies bedeutet, daß das Ereignis auf ein Ziel hinstrebt. Wenn ich sage, ich schreibe ein Buch, so ist dies ein telisches Ereignis. Denn in keinem Moment, wo ich schreibe, liegt das Buch vor, und so kann ich eigentlich in keinem Moment behaupten, ich schriebe ein Buch. Und doch kann es eben das Ziel meiner Handlung sein, daß ein Buch entstehen soll, und dann sage ich eben, ich schreibe ein Buch. Da wir selten Dinge einfach nur so tun, sind viele unserer Handlungen telisch. Es gilt aber oft, daß einer telischen Ereignissen ein Prozeß zugrundeliegt. Ich kann kein Buch schreiben ohne zu schreiben. Aber nicht immer, wenn ich schreibe, schreibe ich auch ein Buch. Und so ist ein Prozeß nicht immer die Grundlage eines telischen Ereignisses. Wir geben ein konkretes Beispiel. Das Buch 'Formal Philosophy' von Montague ist ein posthum von jemand anderem herausgegebener Sammelband. Wollen wir sagen, Montague habe dieses Buch geschrieben? Ja und nein. Im atelischen Sinn hat er dieses Buch geschrieben, denn jede Zeile stammt von ihm. Aber im telischen Sinne hat er das Buch wiederum nicht geschrieben. Jeden einzelnen Aufsatz darin hat er sicherlich — sogar im telischen Sinn — als Aufsatz geschrieben. Aber er hat dieses Buch dennoch nicht *als Buch* geschrieben. Dies bestätigt uns darin, Handlungen von bloßen Prozessen zu unterscheiden auch wenn sie ergebnisgleich sind. Wir konstatieren also, daß Handlungen erstens telisch sind, zweitens nicht statisch und auch nicht punktuell. Dies unterscheidet sie von der letzten Art Ereignissen, welche wir mangels geeigneten Begriffs als **punktuell** bezeichnen wollen. Sie werden in einem kurzen Moment realisiert und nicht in einem längeren Zeitpunkt. Beispiele sind

(12.17) Paul gewann das Rennen.
(12.18) Sophie kam in Hamburg an.
(12.19) Der Ballon zerplatzte.

Wie man bei (12.17) sieht, gibt es keinen Moment bevor er wirklich das Rennen gewann, in welchem er auch gewann. Das kann man nicht vorbereiten, so wie man die Fertigstellung eines Buch vorbereitet. Anders mit (12.18). Natürlich vollführt Sophie gewisse Dinge in Vorbereitung darauf, daß sie in Hamburg ankommen möge. Aber das Intervall, auf das zutrifft, daß Sophie in Hamburg ankommt, ist sehr klein. Niemals während ihrer Reise würden wir sagen, sie käme in Hamburg an. Sondern erst in dem kleinen Zeitabschnitt, an dem sie eben wirklich ankommt, sagen wir, sie käme an. Man beachte auch: die Zeitpunkte, an denen (12.18) wahr ist, spannen sicherlich ein paar Minuten. Dennoch sagen wir, das Ereignis sei punktuell. Man kann dies dadurch rechtfertigen, daß es sicherlich klein ist im Verhältnis zu der Reise, welche Sophie gemacht hat. (Manche bevorzugen deswegen auch: **resultativ**.) Fassen wir zusammen:

Ereignisart	statisch	telisch	punktuell
Zustand	+	−	−
Prozeß	−	−	−
Handlung	−	+	−
punktuelles E	−	+	+

Übungen

Übung 56. Benennen Sie die θ–Rollen der Argumente in folgenden Sätzen.

(12.20) Paul steht auf dem Deck.
(12.21) Sophie mag Skat.
(12.22) Stefan hämmert auf dem Steinblock herum.

Übung 57. Klassifizieren Sie Ereignisse in den folgenden Sätzen.

(12.23) Das Zimmer ist kalt.
(12.24) Das Zimmer wird kalt.
(12.25) Der Stein rollt.
(12.26) Paul rollt den Stein.
(12.27) Paul rollt den Stein bis zum Haus.

Übung 58. Die θ–Rolle *Ort* kann auf mehrere Weisen realisiert werden. Hier ist ein Beispiel, welches sich auch mit Verben wie klettern, steigen realisieren läßt. Was bewirken die Vorsilbe be- bzw das Passiv?

(12.28) Paul tritt in den Saal.
(12.29) Paul betritt den Saal.
(12.30) Der Saal wird betreten.

Übung 59. Wir haben schon bemerkt, daß aus (12.31) (12.32) folgt und umgekehrt. Was folgt für den Status des Agenten des Ereignisses in (12.31)?

(12.31) Paul tanzt mit Sophie.
(12.32) Sophie tanzt mit Paul.

Übung 60. Es wird allgemein angenommen, daß ein Argument im Satz genau eine θ–Rolle zugewiesen bekommt. Wie viele θ–Rollen muß man also anstelle der oben erwähnten Rolle *Ort* annehmen?

13 Ereignisse II

In diesem Kapitel wollen wir uns schließlich damit beschäftigen, wie die Bedeutung eines Satzes zustandekommt, wenn die Bedeutung von Verben nunmehr nicht Funktionen sind, sondern Ereignisse. Wie gesagt, gibt es jetzt einen neuen Typ Ding, den des Ereignisses. Geben wir ihm den Namen r. Es gibt nun in unserem Modell partielle Funktionen, $[\mathsf{agens}]^{\mathfrak{M}}$, $[\mathsf{thema}]^{\mathfrak{M}}$ usw, welche zu einem Ereignis die Mitspieler angeben. Diese können Gruppen sein, müssen es aber nicht. Diese Funktionen sind vom Typ $r \to e$. Es gibt ferner die Funktionen $[\mathsf{zeit}]^{\mathfrak{M}}$ und $[\mathsf{ort}]^{\mathfrak{M}}$, welche jedem Ereignis seine Zeitintervall und seinen Ort zuweist. Dies soll uns genügen. Die ersten Fragen, die sich uns stellen, sind: welcher der Mitspieler ist das Subjekt, welcher Objekt? Wie unterscheidet sich die Semantik des Verbs von der seines zugehörigen Nomen? Die letzte Frage ist leicht zu beantworten: wir nehmen an, grundsätzlich bestehe kein Unterschied zwischen der Semantik der Verben und der Semantik der von ihnen abgeleiteten Nomina. Das Nomen Reise bezeichnet dieselbe Art

Dinge wie das Verb reisen, nämlich eine Art von Prozeß. Warum nun Sprachen überhaupt einen Unterschied zwischen Nomina und Verben machen, ist prinzipiell gesehen eine andere Frage. Denn ein morphologischer oder syntaktischer Unterschied muß ja nicht semantisch begründet sein. In der Tat ist es sehr schwer, einen konsequenten Unterschied zwischen der Semantik der Nomina und der Semantik der Verben zu machen. In einigen Sprachen ist dieser Unterschied auch nicht so ausgeprägt wie im Deutschen. Aber wie dem immer auch ist: die beiden Kategorien unterscheiden sich jedenfalls in der Spannbreite der Dinge, die sie überhaupt bezeichnen können.

Nun aber zur ersten Frage, der nach der Syntax von Verben. In der Tat war es schon bei unser zuerst entwickelten Semantik nicht unproblematisch, vom ersten Argument eines zweistelligen Verbs als Objekt zu sprechen. Alle Arten von Nominalphrasen können nämlich hier auftreten.

(13.1)	Jan sieht Sophie.	(Akkusativobjekt)
(13.2)	Dies gefällt mir.	(Dativobjekt)
(13.3)	Jan denkt darüber nach.	(Präpositionalobjekt)

Wir kommen deswegen nicht umhin, bei jeden Argument, das das Verb nimmt, zu vermerken, um welche Art Komplement es sich handelt. Man nimmt nun an, daß sich diese Information im Lexikon befindet. Ein spezieller Eintrag für ein Verb enthält also außer den rein semantischen, syntaktischen, phonologischen und morphologischen Fakten auch solche Angaben, die sich auf die Beziehung zwischen — in diesem Fall — Syntax und Semantik des Verbs beziehen. Dort wird dann eben vermerkt, daß ein Satz, bei dem eine NP das erste Argument von gefallen ist, diese NP in dem Dativ zu stehen hat. Man bezeichnet diese Angaben auch als **Subkategorisierungsrahmen**.

In der Ereignissemantik kommt nun noch etwas hinzu. Denn nun haben keinerlei Angaben über die Reihenfolge von Argumenten, wir haben lediglich eine Anzahl θ–Rollen. Diese θ–Rollen können je nach Verb in unterschiedlichen grammatischen Funktionen realisiert werden. Wir müssen also zusätzlich in dem Lexikon vermerken, in welcher grammatischen Funktion eine gegebene θ–Rolle eines Verbs auftritt. Wir merken nur an, daß sich einige Linguisten mit der Frage befaßt haben, ob sich dies aus der Art dem Verb zugeordneten θ–Rollen erschließen läßt. Sie haben bemerkt, daß es zum Beispiel eine Hierarchie für θ–Rollen gibt, die sprachunabhängig ist. Hat ein Verb mehrere θ–Rollen, so gewinnt die in der Hierarchie höchste θ–Rolle in dem Wettbewerb um die Funktion ‘Subjekt’. Wir wollen das nicht weiter kommentieren. Wir haben also für das Deutsche etwa folgende Subkategorisierungsrahmen. (Hierbei steht 'S' für das Subjekt, 'DO' für das Dativobjekt, 'AO' für das Akkusativobjekt und 'PO' für das Präpositionalobjekt.)

rennen	:	S : Agens.		
sehen	:	S : Wahrnehmer,	AO : Thema.	
nachdenken	:	S : Agens,	(AO : Thema).	
malen	:	S : Agens,	(AO : Thema).	
schenken	:	S : Agens,	AO : Thema,	DO : Benefizient.
gefallen	:	S : Thema,	DO : Wahrnehmer.	
ankommen	:	S : Agens,	(PO : Ort).	

Diese Subkategorisierungsrahmen zeigen deutlich, wie das Verb konstruiert werden muß und wie die einzelnen Satzteile den θ–Rollen zugeordnet werden müssen. In Klammern gesetzte Argumente sind nicht obligatorisch. Dies betrifft jedoch nur die Verben, und diese auch nur im Aktiv. Ist das Verb im Passiv, so werden die Assoziationen zwischen θ–Rollen und grammatischen Funktionen entsprechend verändert. Das Objekt wird zum Subjekt, und das Subjekt wird faktultativ durch eine Präpositionalphrase ausgedrückt. Wird das Verb nominalisiert, so verliert es durchgehend sein Subjekt und seine Objekte bis auf das Präpositionalobjekt. Subjekt und Objekt können fakultativ durch den Genitiv bzw eine Präpositionalphrase ausgedrückt werden.

(13.4) Paul reist durch den Himalaya.
(13.5) Pauls Reise durch den Himalaya
(13.6) Die Römer zerstörten Karthago.
(13.7) Die Zerstörung Karthagos
(13.8) Die Zerstörung Karthagos durch die Römer
(13.9) Karthagos Zerstörung durch die Römer

Wie sollen wir nun verstehen, ob ein Satz wie (13.10) wahr ist?

(13.10) Sophie malt ein Bild.

Ignorieren wir die Zeit. Wir hatten schon in dem letzten Kapitel angedeutet, daß wir dies so interpretieren wollen: es gibt ein Ereignis, welches ein Mal–Ereignis ist, dessen Agens Sophie und dessen Thema ein Bild ist. Da die Bedeutung von Verben gleich der der Nomina ist, wollen wir gleichermaßen annehmen, die Bedeutung von malen sei eine *Garbe* von Ereignissen. Das heißt, $[\mathsf{malen}]^{\mathfrak{M}}$ ist eine Menge von Ereignissen, nämlich die Menge der Mal–Ereignisse. Nennen wir sie E. Jedes Einzelereignis von E hat nun gemäß der obenstehenden Tabelle ein Agens, welches als Subjekt realisiert wird und ein Thema, welches im Akkusativ realisiert wird. Wir schließen, daß Sophie das Agens ist. [8] Das Bild ist also das Thema. Nun sagen wir: (13.10) ist wahr, falls ein $e \in E$ existiert mit $[\mathsf{Sophie}]^{\mathfrak{M}} = [\mathsf{agens}]^{\mathfrak{M}}(e)$ und $[\mathsf{thema}]^{\mathfrak{M}}(e) \in [\mathsf{bild}]^{\mathfrak{M}}$. Also muß Sophie dier Inaberin der θ–Rolle des Agens sein und ein Bild — egal welches — Inhaber der θ–Rolle des Themas von e. Dies genügt.

Im Plural, also bei Gruppen, gilt für die Realisierung der Argumente folgende Regel: ist die NP ein Einzelding oder eine Gruppe, so muß sie identisch mit dem Inhaber der θ–Rolle sein. Ist sie eine Garbe, so muß sie den Inhaber der θ–Rolle enthalten. Man beachte also, daß es nicht ausreicht, daß man lediglich ein Teil einer Gruppe ist, welche Inhaber der θ–Rolle ist. Wenn also Almut und Sophie sich treffen, so ist das Agens von diesem Ereignis die Gruppe $\{\text{Sophie}, \text{Almut}\}$ und eben nicht einfach nur Sophie oder nur Almut. Dies wirft ein neues Licht auf unsere Fakten bezüglich Distributivität. Ob ein Verb distributiv ist oder nicht, hängt mit der Art der von ihm bezeichneten Ereignisse zusammen. Nun haben wir aber ein Problem. Sagen wir zum Beispiel

(13.11) Paul und Sophie rennen.

so sind wir gezwungen zu sagen, daß es (mindestens) drei Ereignisse gibt: eines, bei dem Paul und Sophie rennen, eines, in welchem Paul rennt, und eines, in welchem Sophie rennt. Aber Pauls Rennen konstituiert nun schon das Ereignis

(13.12) Paul rennt.

Wie um aller Welt sollte es also zusätzlich noch das Ereignis (13.11) konstitutieren? Wir hatten zwar gesagt, daß ich mit einer einzigen Handlung mehrere Ereignisse konstituieren kann, aber es geht intuitiv nicht an, daß (13.12) in Gegenwart von (13.13) auch (13.11) konstituiert.

(13.13) Sophie rennt.

Die einzige Lösung, die sich uns anbietet, ist es, mehrere Ereignisse für (13.11) anzunehmen. Der Satz (13.11) behauptet nicht einfach die Existenz eines einzigen Ereignisses sondern in diesem Fall der Existenz zweier Ereignisse, nämlich (13.12) und (13.13). Dies erscheint auf den ersten Blick zuviel

[8] Das ist aus syntaktischen Gründen nicht notwendig. Es könnte auch umgekehrt sein. Denn sowohl kann Sophie im Akkusativ sein wie auch ein Bild im Nominativ. Da aber ein Agens auch belebt sein muß, schließen wir, daß das Bild als Agens nicht in Frage kommt.

des Guten, aber es gibt einige Gründe, die für eine solche Annahme sprechen. Zum einen wollen wir annehmen, daß Ereignisse, wie auch Dinge, eine raumzeitliche Kohärenz besitzen. Der Ort eines Ereignisses muß zusammenhängend sein, ebenso auch die Zeit. Falls dem so ist, müssen wir in den folgenden Beispielen in der Tat mehrere Ereignisse annehmen.

(13.14) In London, Paris und Berlin kamen je zwei Abgesandte von Amerika an.
(13.15) Immer wieder befragte die Polizei den Verdächtigen.
(13.16) Jeden Tag fuhr Paul mit der Straßenbahn.

Weiter wollen wir in den folgenden Sätzen sicher nicht von einem einzigen, sondern von mehreren Ereignissen reden.

(13.17) Sophie malte und zeichnete die ganze Nacht.
(13.18) Hans atmete tief ein und aus.

Der Satz (13.17) spricht von mindestens einem Ereignis des Malens und einem des Zeichnens. Ebenso spricht (13.18) von einem Ereignis des Einatmens und einem Ereignis des Ausatmens. Wollen wir diese als ein oder als zwei Ereignisse ansehen? Sicher wollen wir hier mehrere Ereignisse annehmen.

Kommen wir also wieder auf (13.11) zurück. Wir wollen sagen, daß rennen *überhaupt nicht auf Gruppen zutreffen kann.* Dies ist keineswegs ein logisches Faktum; sondern es ist der Tatsache geschuldet, daß jeder nun mal für sich alleine rennen muß. [9] Insofern kann in (13.11) also gar nicht die Rede von nur einem Ereignis sein, sondern in der Tat von einer *Gruppe* von Ereignissen. Damit sind wir bei der völligen Angleichung von Verb– und Nominalsemantik angekommen. Verben bezeichnen nicht einfach nur Ereignisse, sondern im Ernstfall sogar Garben von Gruppen von Ereignissen. Dies zieht folgende Konsequenzen nach sich. Wir müssen sagen, was der Inhaber einer θ–Rolle einer Gruppe von Ereignissen ist. Dies soll wieder einfach nur die Gruppe der Inhaber der jeweiligen θ–Rolle der Einzelereignisse sein. (13.11) zum Beispiel ist wahr, wenn es zwei Ereignisse, e_1 und e_2, gibt, deren Agens Paul bzw Sophie sind. Das Agens der Gruppe $\{e_1, e_2\}$ ist dann die Gruppe $\{\text{Paul}, \text{Sophie}\}$. (13.11) ist wahr, weil diese Gruppe das Agens des Gruppenereignisses $\{e_1, e_2\}$ ist, welches eine Gruppe von Renn–Ereignissen ist. Das Verb rennen denotiert im Plural deswegen nur Gruppen von Ereignissen, weil

[9] Natürlich gibt es keinen logischen Grund, warum rennen nicht auch Gruppen als Agens nimmt. Dies ist eher eine kognitiv zu begründende Tatsache, welche wir hier einfach nur konstatieren, ohne sie wirklich belegen zu können.

Gruppen nicht als Agens eines einzelnen Renn–Ereignisses fungieren können. In anderen Fällen ist die Lage anders. Wir haben schon gesagt, daß sich treffen als Agens eine Gruppe fordert. Also muß es im Plural nicht notwendig eine Gruppe von Ereignissen bezeichnen.

(13.19) Die Fans trafen sich um halb acht.
(13.20) Die Meiers und die Schmidts trafen sich.

In (13.19) steht eine Gruppe (die Fans) als Agens zur Verfügung. Falls wir von einem Ereignis ausgehen, so ist diese Gruppe das Agens dieses Ereignisses. Wie (13.20) lehrt, kann man aber auch annehmen, daß es sich um mehrere Ereignisse handelt, und daß das Subjekt auf diese Ereignisse verteilt wird. Konkret heißt dies. (13.20) kann so gelesen werden, daß es zwei Ereignisse gab, e_1 und e_2, derart, daß in e_1 die Meiers das Agens sind und in e_2 die Schmidts. Die letztere Lesart liegt vor, wenn es sich bei der Gruppe in (13.20) um eine Zweiergruppe handelt, welche die Gruppe der Meiers und die Gruppe der Schmidts als Elemente enthält. Diese Gruppe wird zunächst auf die Gruppe $\{e_1, e_2\}$ verteilt. Jedes der Einzelereignisse bekommt eine Gruppe als Agens zugeteilt, und alles läuft wunschgemäß. Ist also E eine Gruppe von Ereignissen, so setzen wir

$$[\mathsf{agens}]^{\mathfrak{M}}(E) := \{[\mathsf{agens}]^{\mathfrak{M}}(e) : e \in E\}$$

Dies definiert das sogenannte Gruppen–Agens für eine Gruppe. Entsprechend verfahren wir mit den anderen θ–Rollen.

Wir werden allerdings gleich sehen, daß es mit dem Gruppen–Agens alleine nicht getan ist. Wir benötigen auch noch das *kumulative Agens*. Das kumulatives Agens definieren wir als die Vereinigung des Gruppen–Agens:

$$[\mathsf{agens}_k]^{\mathfrak{M}}(E) := \bigcup\{[\mathsf{agens}]^{\mathfrak{M}}(e) : e \in E\}$$

Um die Notwendigkeit des kumulativen Agens zu sehen, kehren wir zu den Pluralen zurück. Haben wir eine Gruppe von Ereignissen, so werden Sätze anscheinend jetzt auf noch weitere Weisen ambig, da wir ja nun auch noch das Subjekt und das Objekt auf verschiedene Ereignisse verteilen müssen. Betrachten wir also noch einmal ein altes Beispiel.

(13.21) Vier Träger schleppten drei Klaviere nach oben.

Dreh- und Angelpunkt ist jetzt die Frage, wie viele Ereignisse des Schleppens wir annehmen wollen, und was dabei im einzelnen passiert. In der kumulativen Lesart gibt es eine Gruppe von Ereignissen, in denen einige der Träger sowie einige der Klaviere beteiligt sind. Da Klaviere sehr schwer sind, nehmen wir an, jedes Ereignis des Schleppens betreffe jeweils nur ein Klavier. Nun kann es sicherlich sehr viele Ereignisse geben. Die Träger können ja zwischendrin Pause gemacht haben. Unter dem Strich, das sagt (13.21), waren es jedenfalls vier Träger und drei Klaviere, egal wie viele Ereignisse es gab. Also müssen wir davon ausgehen, daß (13.21) nicht das Gruppen–Agens betrifft, sondern nur das kumulative Agens und nicht das Gruppen–Thema sondern nur das kumulative.

Übungen

ÜBUNG 61. Geben Sie Subkategorisierungsrahmen für folgende Verben an.

überraschen, meißeln, sich erinnern, wohnen

Begründen Sie diese mit Beispielen.

ÜBUNG 62. Wie verändert sich der Subkategorisierungsrahmen beim Übergang auf das Gerundium? Geben Sie Beispiele.

ÜBUNG 63. Geben Sie Szenarien an, unter denen folgende Sätze wahr sind. Handelt es sich bei Paul und Stefan jeweils um ein Gruppen–Agens oder ein kumulatives Agens?

(13.23) Paul und Stefan gaben Sophie und Anne drei Rosen.
(13.24) Paul und Stefan gaben Sophie und Anne je drei Rosen.
(13.25) Paul und Stefan gaben jeder Sophie und Anne drei Rosen.

Hinweis. Ein Szenario ist hier eine Gruppe von Ereignissen.

ÜBUNG 64. Geben Sie je zwei verschiedene Lesarten für die folgenden Sätze im Zusammenhang mit dem Skopus von mehrmals an. Welche sind überhaupt sinnvoll?

(13.26) Herbert erhielt mehrmals eine große Summe Geld.
(13.27) Paul reichte mehrmals einen ungedeckten Scheck ein.

ÜBUNG 65. Manche Autoren behaupten, die Bedeutung eines Verbs im Satz sei eine Folge von aufeinanderfolgenden Ereignissen. Dabei folgt ein Ereignis e_2 einem Ereignis e_1, wenn e_2 beginnt, nachdem e_1 aufgehört hat. Zeigen Sie, daß diese Behauptung nicht haltbar ist.