

[E1.] Es sei eine Funktion A auf den natürlichen Zahlen wie folgt definiert.

$$A(0) := 7$$
$$A(n+1) := \begin{cases} 3A(n) + 1 & \text{falls } A(n) \text{ ungerade} \\ A(n)/2 & \text{falls } A(n) \text{ gerade} \end{cases}$$

Verifizieren Sie, dass es eine Zahl n gibt, sodass $A(n) = 1$. *Bemerkung.* Ab da wird die Funktion langweilig. Denn dann ist $A(n+1) = 4$, $A(n+2) = 2$, $A(n+3) = 1$. Diese Folge ist berühmt und heißt auch *Achterbahnfolge*. Sie stammt von Lothar Collatz, der vermutet hat, dass, egal, was man für $A(0)$ setzt, die Funktion immer irgendwann 1 wird. Diese Vermutung ist bis jetzt unbewiesen.

[E2.] Es sei eine Funktion f auf den natürlichen Zahlen wie folgt rekursiv definiert.

$$f(0) := 0$$
$$f(n+1) := f(n) + 3n^2 + 3n + 1$$

Berechnen Sie $f(n)$ für $n = 0, 1, \dots, 5$.

[E3.] Zeigen Sie, dass $f(n) = n^3$ ist. *Hinweis.* Dazu müssen Sie zeigen, dass die Funktion n^3 die Rekursionsgleichungen aus der vorigen Aufgabe erfüllt.

[E4.] Schreiben Sie die Menge $\underline{4}$ explizit auf.