

In den folgenden Übungen befinden wir uns ausschließlich in der Struktur \mathfrak{N} (mit der entsprechenden Signatur).

[I1.] Wir beginnen mit der Formel $\eta(x, y)$, die besagt, dass x ein Teiler von y ist: $\eta(x, y) := (\exists x_0) (x * x_0 = y)$. Bestimmen Sie $\eta(x_0, x_1)$, $\eta(x_0, x_0)$ und $\eta(x_1, x_2)$.

[I2.] Die folgende Formel besagt, dass die Zahl x genau einen größten Teiler $\neq x$ besitzt.

$$\chi(x) := (\exists x_0) (\eta(x_0, x) \wedge (\forall x_1) (\eta(x_1, x) \rightarrow x_1 = x \vee \eta(x_1, x_0)))$$

Schreiben Sie diese Formel vollständig auf, indem Sie η durch die Formel in der vorigen Aufgabe ersetzen. *Anmerkung.* Eine Zahl erfüllt $\chi(x)$ genau dann, wenn sie Potenz einer Primzahl ist.

[I3.] Bestimmen Sie in $\chi(x_0)$ alle uneigentlichen, freien und gebundenen Vorkommen von Variablen, und geben Sie an, welcher Quantor welches Vorkommen einer Variable bindet.

[I4.] Die Formel $\chi(x)$ ist äquivalent zu folgender Formel.

$$\theta(x) := (\exists x_0) (\exists x_1) (x_0 * x_1 = x \\ \wedge (\forall x_2) (\forall x_1) (x_2 * x_1 = x \rightarrow (\exists x_1) (x_2 * x_1 = x_0 \vee x_2 = x)))$$

Bilden Sie $\theta(x_0)$ und wiederholen Sie die vorige Aufgabe mit dieser Formel.