

[H1.] Prüfen Sie, ob die folgenden Sätze in der Struktur der Reste modulo 5 wahr sind.

1. $(\exists x \in \mathbb{Z}_5) (x^2 + x = 0)$
2. $(\forall x \in \mathbb{Z}_5) (\neg x = 0 \rightarrow x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 1)$
3. $(\forall x \in \mathbb{Z}_5) (x^2 + 1 = 0 \vee x^2 + 1 = 1 \vee x^2 + 1 = (-1) + (-1) = 0 \vee x^2 + 1 = 0)$

[H2.] Betrachten Sie folgende Formel.

$$(\forall x \in \mathbb{Z}_5) G(L(x)) = R(G(x))$$

Ist diese wahr in \mathfrak{R} ? Geben Sie zunächst einmal ihren intuitiven Gehalt wieder und versuchen Sie zu verstehen, ob sie wahr ist oder nicht. Verifizieren Sie dann Ihre Antwort, indem Sie vier von den insgesamt 24 möglichen Werten einsetzen.

[H3.] Geben Sie einen Satz in der formalen Sprache von \mathfrak{R} an der besagt, dass es zwei Ritter gibt, die einander die Taten rühmen. Geben Sie ebenso einen Satz an, der besagt, dass es einen Ritter gibt, der die Taten jedes Helden ohnegleichen rühmt. Verifizieren Sie, ob diese in \mathfrak{R} gültig sind.

[H4.] Geben Sie einen Satz an, der in \mathfrak{R} besagt, dass es eine Zahl gibt, die auf zwei verschiedene Weisen als Summe dritter Potenzen darstellbar ist. (Wie schon erklärt, ist 1729 die kleinste solche Zahl, denn $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.)