Total smart und auch noch reich — hohe Mathematik in der Wirtschaft

Jahr der Mathematik 2008
Vortragsreihe "Mathematik ist überall: Mathematische Modellbildung"

Prof. Dr. Frank Riedel[1]

[1]Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung (IMW)

12. November 2008

Mathematik in der(n) Wirtschaft(swissenschaften)

- früher: If you are so smart, why ain't you rich?
- heute: ... laughs all the way down Wall Street to his appointment as a high-paid consultant (Paul Samuelson)
- man kann mit Mathematik reich werden!
- ... man muss aber nicht

Mathematik in der(n) Wirtschaft(swissenschaften)

- früher: If you are so smart, why ain't you rich?
- heute: . . . laughs all the way down Wall Street to his appointment as a high-paid consultant (Paul Samuelson)
- man kann mit Mathematik reich werden!
- . . . man muss aber nicht

Mathematik in der(n) Wirtschaft(swissenschaften)

- früher: If you are so smart, why ain't you rich?
- heute: ... laughs all the way down Wall Street to his appointment as a high-paid consultant (Paul Samuelson)
- man kann mit Mathematik reich werden!
- ... man muss aber nicht

Mathematik in der(n) Wirtschaft(swissenschaften)

- früher: If you are so smart, why ain't you rich?
- heute: ... laughs all the way down Wall Street to his appointment as a high-paid consultant (Paul Samuelson)
- man kann mit Mathematik reich werden!
- ... man muss aber nicht

Überblick

1. Finanzmärkte und Mathematik I: verrückte Funktionen
2. Institutionen und Mathematik: UMTS– und andere Auktionen
3. Finanzmärkte und Mathematik II: Die Krise — was man bei Anne Will nicht sagen darf

Überblick

1. Finanzmärkte und Mathematik I: verrückte Funktionen
2. Institutionen und Mathematik: UMTS– und andere Auktionen
3. Finanzmärkte und Mathematik II: Die Krise — was man bei Anne Will nicht sagen darf

Überblick

1. Finanzmärkte und Mathematik I: verrückte Funktionen
2. Institutionen und Mathematik: UMTS– und andere Auktionen
3. Finanzmärkte und Mathematik II: Die Krise — was man bei Anne Will nicht sagen darf

Zuerst: Reine Mathematik

- Stetige Funktionen: "keine Sprünge"
- Differenzierbare Funktionen: "glatt"
- Stetige Funktionen, die **nirgendwo** differenzierbar sind? Gibt's das?
- Weierstrass 1872:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos\left(9^{n}\pi x\right)$$

Zuerst: Reine Mathematik

- Stetige Funktionen: "keine Sprünge"
- Differenzierbare Funktionen: "glatt"
- Stetige Funktionen, die **nirgendwo** differenzierbar sind? Gibt's das?
- Weierstrass 1872:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos\left(9^n \pi x\right)$$

Zuerst: Reine Mathematik

- Stetige Funktionen: "keine Sprünge"
- Differenzierbare Funktionen: "glatt"
- Stetige Funktionen, die **nirgendwo** differenzierbar sind? Gibt's das?
- Weierstrass 1872:

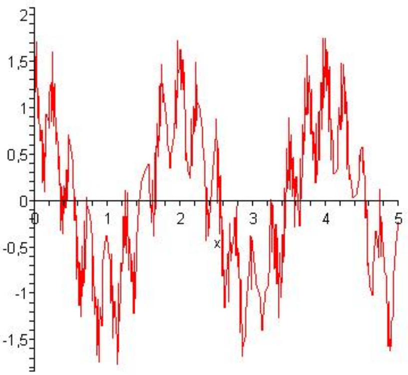
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos\left(9^n \pi x\right)$$

Zuerst: Reine Mathematik

- Stetige Funktionen: "keine Sprünge"
- Differenzierbare Funktionen: "glatt"
- Stetige Funktionen, die **nirgendwo** differenzierbar sind? Gibt's das?
- Weierstrass 1872:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos\left(9^n \pi x\right)$$

Weierstrass' Beispiel



Fast alle stetigen Funktionen sind so!

Wie selten sind solche Funktionen?

- Banach–Mazurkiewicz: Die stetigen und nirgendwo differenzierbaren Funktionen sind eine Menge zweiter Kategorie in der Klasse aller stetigen Funktionen (d.h. sehr groß).
- Hunt–Sauer–Yorke: Die Menge aller glatten Funktionen ist schüchtern.
- **Glatte Funktionen sind selten, verrückte sind überall!**

Definition

Von nun an nennen wir stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen verrückt.

Fast alle stetigen Funktionen sind so!

Wie selten sind solche Funktionen?

- Banach–Mazurkiewicz: Die stetigen und nirgendwo differenzierbaren Funktionen sind eine Menge zweiter Kategorie in der Klasse aller stetigen Funktionen (d.h. sehr groß).
- Hunt–Sauer–Yorke: Die Menge aller glatten Funktionen ist schüchtern.
- **Glatte Funktionen sind selten, verrückte sind überall!**

Definition

Von nun an nennen wir stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen verrückt.

Fast alle stetigen Funktionen sind so!

Wie selten sind solche Funktionen?

- Banach–Mazurkiewicz: Die stetigen und nirgendwo differenzierbaren Funktionen sind eine Menge zweiter Kategorie in der Klasse aller stetigen Funktionen (d.h. sehr groß).
- Hunt–Sauer–Yorke: Die Menge aller glatten Funktionen ist schüchtern.
- **Glatte Funktionen sind selten, verrückte sind überall!**

Definition

Von nun an nennen wir stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen verrückt.

Fast alle stetigen Funktionen sind so!

Wie selten sind solche Funktionen?

- Banach–Mazurkiewicz: Die stetigen und nirgendwo differenzierbaren Funktionen sind eine Menge zweiter Kategorie in der Klasse aller stetigen Funktionen (d.h. sehr groß).
- Hunt–Sauer–Yorke: Die Menge aller glatten Funktionen ist schüchtern.
- **Glatte Funktionen sind selten, verrückte sind überall!**

Definition

Von nun an nennen wir stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen verrückt.

Fast alle stetigen Funktionen sind so!

Wie selten sind solche Funktionen?

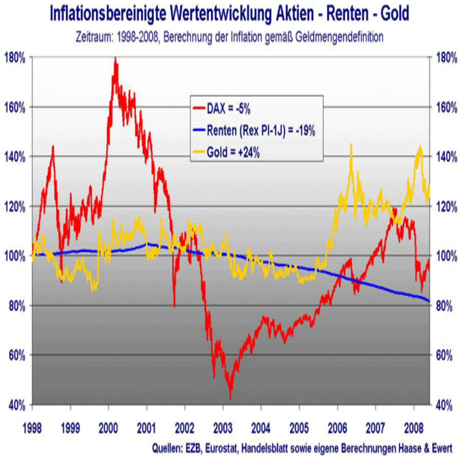
- Banach–Mazurkiewicz: Die stetigen und nirgendwo differenzierbaren Funktionen sind eine Menge zweiter Kategorie in der Klasse aller stetigen Funktionen (d.h. sehr groß).
- Hunt–Sauer–Yorke: Die Menge aller glatten Funktionen ist schüchtern.
- **Glatte Funktionen sind selten, verrückte sind überall!**

Definition

Von nun an nennen wir stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen verrückt.

Aktienkurse

Verrückte Bilder finden wir auch im Wirtschaftsteil:



Aktienkurse und Weierstrass' verrückte Funktionen

Grundgesetz der Aktienmärkte:

- no free lunch
- no arbitrage
- kein sicherer Gewinn ohne Risiko
- es gibt kein sicheres System, mit dem man den Markt schlagen kann

Aktienkurse und Weierstrass' verrückte Funktionen

Grundgesetz der Aktienmärkte:

- no free lunch
- no arbitrage
- kein sicherer Gewinn ohne Risiko
- es gibt kein sicheres System, mit dem man den Markt schlagen kann

Aktienkurse und Weierstrass' verrückte Funktionen

Grundgesetz der Aktienmärkte:

- no free lunch
- no arbitrage
- kein sicherer Gewinn ohne Risiko
- es gibt kein sicheres System, mit dem man den Markt schlagen kann

Aktienkurse und Weierstrass' verrückte Funktionen

Grundgesetz der Aktienmärkte:

- no free lunch
- no arbitrage
- kein sicherer Gewinn ohne Risiko
- es gibt kein sicheres System, mit dem man den Markt schlagen kann

Aktienkurse und Weierstrass' verrückte Funktionen

Grundgesetz der Aktienmärkte:

- no free lunch
- no arbitrage
- kein sicherer Gewinn ohne Risiko
- es gibt kein sicheres System, mit dem man den Markt schlagen kann

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

□

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch. □

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

- Wenn glatt, dann vorhersagbar.

  Wenn vorhersagbar, dann Arbitrage.

□

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

- Wenn glatt, dann vorhersagbar.
- Wenn vorhersagbar, dann Arbitrage!

$\square$

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

- Wenn glatt, dann vorhersagbar.
- Wenn vorhersagbar, dann Arbitrage!

□

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

- Wenn glatt, dann vorhersagbar.
- Wenn vorhersagbar, dann Arbitrage!

□

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

- Wenn glatt, dann vorhersagbar.
- Wenn vorhersagbar, dann Arbitrage!

□

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Theorem

Aus dem Grundgesetz der Aktienmärkte folgt:

Theorem

- *Wenn ein Aktienkurs stetig ist, dann ist er nirgendwo differenzierbar;*
- *alternativ kann er unvorhersehbar springen.*
- **Aktienkurse müssen verrückt sein.**

Beweis.

Durch Widerspruch.

- Wenn glatt, dann vorhersagbar.
- Wenn vorhersagbar, dann Arbitrage!

□

Definition

unvorhersehbar: es gibt kein Computerprogramm, das auf Basis der Beobachtungen den Sprung ankündigen könnte.

Wieder Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

Brownsche Bewegung

- Bei (stetigen) Aktienkursen handelt es sich um Diffusionen
- Prototyp: Brownsche Bewegung, das Ergebnis vieler unabhängiger kleiner Störungen
- Zentraler Grenzwertsatz: normalverteilt
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): **mit Wahrscheinlichkeit 1 sind alle Pfade einer Brownschen Bewegung verrückt**
- die Wahrscheinlichkeitstheorie des 20. Jhd. identifiziert als normal, was die deterministische Mathematik des 19. Jhd. als unnormal empfand

Wieder Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

Brownsche Bewegung

- Bei (stetigen) Aktienkursen handelt es sich um Diffusionen
- Prototyp: Brownsche Bewegung, das Ergebnis vieler unabhängiger kleiner Störungen
- Zentraler Grenzwertsatz: normalverteilt
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): **mit Wahrscheinlichkeit 1 sind alle Pfade einer Brownschen Bewegung verrückt**
- die Wahrscheinlichkeitstheorie des 20. Jhd. identifiziert als normal, was die deterministische Mathematik des 19. Jhd. als unnormal empfand

Wieder Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

Brownsche Bewegung

- Bei (stetigen) Aktienkursen handelt es sich um Diffusionen
- Prototyp: Brownsche Bewegung, das Ergebnis vieler unabhängiger kleiner Störungen
- Zentraler Grenzwertsatz: normalverteilt
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): **mit Wahrscheinlichkeit 1 sind alle Pfade einer Brownschen Bewegung verrückt**
- die Wahrscheinlichkeitstheorie des 20. Jhd. identifiziert als normal, was die deterministische Mathematik des 19. Jhd. als unnormal empfand

Wieder Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

Brownsche Bewegung

- Bei (stetigen) Aktienkursen handelt es sich um Diffusionen
- Prototyp: Brownsche Bewegung, das Ergebnis vieler unabhängiger kleiner Störungen
- Zentraler Grenzwertsatz: normalverteilt
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): **mit Wahrscheinlichkeit 1 sind alle Pfade einer Brownschen Bewegung verrückt**
- die Wahrscheinlichkeitstheorie des 20. Jhd. identifiziert als normal, was die deterministische Mathematik des 19. Jhd. als unnormal empfand

Wieder Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

Brownsche Bewegung

- Bei (stetigen) Aktienkursen handelt es sich um Diffusionen
- Prototyp: Brownsche Bewegung, das Ergebnis vieler unabhängiger kleiner Störungen
- Zentraler Grenzwertsatz: normalverteilt
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): **mit Wahrscheinlichkeit 1 sind alle Pfade einer Brownschen Bewegung verrückt**
- die Wahrscheinlichkeitstheorie des 20. Jhd. identifiziert als normal, was die deterministische Mathematik des 19. Jhd. als unnormal empfand

Wieder Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

Brownsche Bewegung

- Bei (stetigen) Aktienkursen handelt es sich um Diffusionen
- Prototyp: Brownsche Bewegung, das Ergebnis vieler unabhängiger kleiner Störungen
- Zentraler Grenzwertsatz: normalverteilt
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): **mit Wahrscheinlichkeit 1 sind alle Pfade einer Brownschen Bewegung verrückt**
- die Wahrscheinlichkeitstheorie des 20. Jhd. identifiziert als normal, was die deterministische Mathematik des 19. Jhd. als unnormal empfand

Finanzmathematik: Optionsbewertung

- Die Verrücktheit der Brownschen Bewegung hat auch ihre Vorteile.
- Bezeichne mit (B_t) den Wert der Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt t
- Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte, stetige) Funktion.
- Bezeichne mit $\Delta B_t = B_t - B_{t-2^{-n}}$ die Änderung der Brownschen Bewegung über einem (beliebig) kleinen Zeitintervall

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

- Die Verrücktheit der Brownschen Bewegung hat auch ihre Vorteile.
- Bezeichne mit (B_t) den Wert der Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt t
- Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte, stetige) Funktion.
- Bezeichne mit $\Delta B_t = B_t - B_{t-2^{-n}}$ die Änderung der Brownschen Bewegung über einem (beliebig) kleinen Zeitintervall

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

- Die Verrücktheit der Brownschen Bewegung hat auch ihre Vorteile.
- Bezeichne mit (B_t) den Wert der Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt t
- Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte, stetige) Funktion.
- Bezeichne mit $\Delta B_t = B_t - B_{t-2^{-n}}$ die Änderung der Brownschen Bewegung über einem (beliebig) kleinen Zeitintervall

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

- Die Verrücktheit der Brownschen Bewegung hat auch ihre Vorteile.
- Bezeichne mit (B_t) den Wert der Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt t
- Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte, stetige) Funktion.
- Bezeichne mit $\Delta B_t = B_t - B_{t-2^{-n}}$ die Änderung der Brownschen Bewegung über einem (beliebig) kleinen Zeitintervall

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

- Die Verrücktheit der Brownschen Bewegung hat auch ihre Vorteile.
- Bezeichne mit (B_t) den Wert der Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt t
- Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte, stetige) Funktion.
- Bezeichne mit $\Delta B_t = B_t - B_{t-2^{-n}}$ die Änderung der Brownschen Bewegung über einem (beliebig) kleinen Zeitintervall

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t)$ = Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- θ_k = Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}}$ = Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in t

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t)$ = Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- θ_k = Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}}$ = Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in $t = 0$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t)$ = Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- θ_k = Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}}$ = Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in $t = 0$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t)$ = Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- θ_k = Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}}$ = Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in $t = 0$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t) =$ Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- $\theta_k =$ Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}} =$ Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in $t = 0$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t)$ = Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- θ_k = Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}}$ = Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in $t = 0$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Theorem

Es gibt eine "Strategie" (θ_k), so dass die "Auszahlung" $g(B_t)$ beliebig gut durch folgende Summe über die Pfade der Brownschen Bewegung angenähert wird:

$$g(B_t) \simeq \sum_{k=0}^{2^n} \theta_k \Delta B_{kt2^{-n}}$$

Ökonomische Interpretation

- $g(B_t) =$ Auszahlung einer Option bei Fälligkeit in t
- $\theta_k =$ Anzahl der Aktien im Portefeuille (dynamisch)
- $\Delta B_{kt2^{-n}} =$ Änderung des Aktienkurses
- Jede Option lässt sich perfekt absichern durch Handel in der zu Grunde liegenden Aktie (plus Cash)
- Es gibt einen eindeutigen (arbitragefreien) Wert der Option in $t = 0$

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- . . . funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- . . . funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- ... funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- . . . funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- . . . funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- ... funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Finanzmathematik: Optionsbewertung

Finanzmathematik

- … funktioniert rückwärts!
- **Wir sagen nicht vorher!**
- Bestimmung von Preisen zukünftiger Risiken
- Berechnung von Absicherungsstrategien
- übrigens: θ_k kann negativ sein (Leerverkäufe sind nicht immer verwerflich!)
- Risikomanagement

Intermezzo: Spieltheorie

Spieltheorie

- Analyse strategischer Interaktion
- Beispiele:
  - Schach, Mühle, Poker . . .
  - 2 Firmen auf einem Markt
  - Krieg und Kriegsvermeidung
  - Verträge und Verhandlungen
- Design von Institutionen
  - Organisation von Märkten
  - Auktionen
  - Nierentauschbörse

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à 1,4 MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde *n* auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die deutsche GSM–Auktion 1999

- Eine simultane, aufsteigende Mehrstückauktion
- 10 Objekte
  - 9 Blöcke à 1 MHz
  - 1 Block à $1,4$ MHz
- In jeder Runde bieten die Firmen auf alle 10 Objekte
- Das höchste gegenwärtige Gebot wird angezeigt
- Aktivitätsregel: wenn man in Runde n auf, z.B., 8 Objekte bietet, dann darf man nie wieder auf 9 oder 10 Objekte bieten
- Die Auktion endet, wenn niemand mehr um mind. 10 % überbietet

Die Bieter

- Mannesmann (Vodafone), 40 % Marktanteil
- D – Telekom, 40 % Marktanteil
- viag, 15 % Marktanteil
- eplus, 5 %

Situation

Die beiden großen Firmen brauchten unbedingt neue Kapazität, die kleinen nicht.

Die Bieter

- Mannesmann (Vodafone), 40 % Marktanteil
- D – Telekom, 40 % Marktanteil
- viag, 15 % Marktanteil
- eplus, 5 %

Situation

Die beiden großen Firmen brauchten unbedingt neue Kapazität, die kleinen nicht.

Die Bieter

- Mannesmann (Vodafone), 40 % Marktanteil
- D – Telekom, 40 % Marktanteil
- viag, 15 % Marktanteil
- eplus, 5 %

Situation

Die beiden großen Firmen brauchten unbedingt neue Kapazität, die kleinen nicht.

Die Bieter

- Mannesmann (Vodafone), 40 % Marktanteil
- D – Telekom, 40 % Marktanteil
- viag, 15 % Marktanteil
- eplus, 5 %

Situation

Die beiden großen Firmen brauchten unbedingt neue Kapazität, die kleinen nicht.

Die Bieter

- Mannesmann (Vodafone), 40 % Marktanteil
- D – Telekom, 40 % Marktanteil
- viag, 15 % Marktanteil
- eplus, 5 %

Situation

Die beiden großen Firmen brauchten unbedingt neue Kapazität, die kleinen nicht.

Ablauf der deutschen Auktion

	Frequency #									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36.36	36.36	36.36	36.36	36.36	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
2	40.01	40.01	40.01	40.01	40.01	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	T	T	T	T	T	M	M	M	M	M
3	40.01	40,01	40,01	40,01	40,01	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	T	T	T	T	T	M	M	M	M	M

Zwei erste Bemerkungen

Ablauf der deutschen Auktion

	Frequency #									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36.36	36.36	36.36	36.36	36.36	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
2	40.01	40.01	40.01	40.01	40.01	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	T	T	T	T	T	M	M	M	M	M
3	40.01	40,01	40,01	40,01	40,01	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	T	T	T	T	T	M	M	M	M	M

Zwei erste Bemerkungen

Ablauf der deutschen Auktion

	Frequency #									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36.36 M	36.36 M	36.36 M	36.36 M	36.36 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M
2	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M
3	40.01 T	40,01 T	40,01 T	40,01 T	40,01 T	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M

Zwei erste Bemerkungen

- $36.36 + 10\% = 40$

Ablauf der deutschen Auktion

	Frequency #									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36.36 M	36.36 M	36.36 M	36.36 M	36.36 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M
2	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M
3	40.01 T	40,01 T	40,01 T	40,01 T	40,01 T	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M

Zwei erste Bemerkungen

- $36.36 + 10\% = 40$
- $56 = 40 * 1.4$

Ablauf der deutschen Auktion

	Frequency #									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36.36 M	36.36 M	36.36 M	36.36 M	36.36 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M
2	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.01 T	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M
3	40.01 T	40,01 T	40,01 T	40,01 T	40,01 T	40.00 M	40.00 M	40.00 M	40.00 M	56.00 M

Zwei erste Bemerkungen

- $36.36 + 10\% = 40$
- $56 = 40 * 1.4$

Ablauf der deutschen Auktion

	Frequency #									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36.36	36.36	36.36	36.36	36.36	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
2	40.01	40.01	40.01	40.01	40.01	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	T	T	T	T	T	M	M	M	M	M
3	40.01	40,01	40,01	40,01	40,01	40.00	40.00	40.00	40.00	56.00
	T	T	T	T	T	M	M	M	M	M

Zwei erste Bemerkungen

- $36.36 + 10\% = 40$
- $56 = 40 * 1.4$

Was war passiert?

- In der ersten Runde bietet Mannemann auf alle 10 Objekte so viel, dass eplus und viag aufgeben
- Mannesmann signalisiert mit dem Gebot 36.36 für die ersten 5 Objekte, dass diese Objekte der Telekom zufallen sollen
- Telekom biete entsprechend den Regeln 40.01 für die ersten 5 Objekte
- Beide Spieler verstehen (ohne Absprache!), dass es sich nicht lohnen würde, den Preis weiter hoch zu treiben
- Die Auktion endet

Was war passiert?

- In der ersten Runde bietet Mannemann auf alle 10 Objekte so viel, dass eplus und viag aufgeben
- Mannesmann signalisiert mit dem Gebot 36.36 für die ersten 5 Objekte, dass diese Objekte der Telekom zufallen sollen
- Telekom biete entsprechend den Regeln 40.01 für die ersten 5 Objekte
- Beide Spieler verstehen (ohne Absprache!), dass es sich nicht lohnen würde, den Preis weiter hoch zu treiben
- Die Auktion endet

Was war passiert?

- In der ersten Runde bietet Mannemann auf alle 10 Objekte so viel, dass eplus und viag aufgeben
- Mannesmann signalisiert mit dem Gebot 36.36 für die ersten 5 Objekte, dass diese Objekte der Telekom zufallen sollen
- Telekom biete entsprechend den Regeln 40.01 für die ersten 5 Objekte
- Beide Spieler verstehen (ohne Absprache!), dass es sich nicht lohnen würde, den Preis weiter hoch zu treiben
- Die Auktion endet

Was war passiert?

- In der ersten Runde bietet Mannemann auf alle 10 Objekte so viel, dass eplus und viag aufgeben
- Mannesmann signalisiert mit dem Gebot 36.36 für die ersten 5 Objekte, dass diese Objekte der Telekom zufallen sollen
- Telekom biete entsprechend den Regeln 40.01 für die ersten 5 Objekte
- Beide Spieler verstehen (ohne Absprache!), dass es sich nicht lohnen würde, den Preis weiter hoch zu treiben
- Die Auktion endet

Was war passiert?

- In der ersten Runde bietet Mannemann auf alle 10 Objekte so viel, dass eplus und viag aufgeben
- Mannesmann signalisiert mit dem Gebot 36.36 für die ersten 5 Objekte, dass diese Objekte der Telekom zufallen sollen
- Telekom biete entsprechend den Regeln 40.01 für die ersten 5 Objekte
- Beide Spieler verstehen (ohne Absprache!), dass es sich nicht lohnen würde, den Preis weiter hoch zu treiben
- Die Auktion endet

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

- *Deterministische Mehrstückauktionen sind durch Eliminieren schwach dominierter Strategien lösbar.*
- *Die Auktion endet sofort (Preis 0) mit der effizienten Allokation.*
- *Die Strategie "Ich biete nur auf die Menge, die ich im Gleichgewicht erhalte und verteidige diese bis zu meiner maximalen Zahlungsbereitschaft" stützt dieses Ergebnis.*
- *und dieses Strategien sind teilspielperfekt.*

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

- *Deterministische Mehrstückauktionen sind durch Eliminieren schwach dominierter Strategien lösbar.*
- *Die Auktion endet sofort (Preis 0) mit der effizienten Allokation.*
- *Die Strategie: "ich biete nur auf die Menge, die ich im Gleichgewicht erhalte und verteidige diese bis zu meiner maximalen Zahlungsbereitschaft" stützt dieses Ergebnis*
- *und dieses Strategien sind teilspielperfekt.*

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

- *Deterministische Mehrstückauktionen sind durch Eliminieren schwach dominierter Strategien lösbar.*
- *Die Auktion endet sofort (Preis 0) mit der effizienten Allokation.*
- *Die Strategie: "ich biete nur auf die Menge, die ich im Gleichgewicht erhalte und verteidige diese bis zu meiner maximalen Zahlungsbereitschaft" stützt dieses Ergebnis*
- *und dieses Strategien sind teilspielperfekt.*

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

- *Deterministische Mehrstückauktionen sind durch Eliminieren schwach dominierter Strategien lösbar.*
- *Die Auktion endet sofort (Preis 0) mit der effizienten Allokation.*
- *Die Strategie: "ich biete nur auf die Menge, die ich im Gleichgewicht erhalte und verteidige diese bis zu meiner maximalen Zahlungsbereitschaft" stützt dieses Ergebnis*
- *und dieses Strategien sind teilspielperfekt.*

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

- *Deterministische Mehrstückauktionen sind durch Eliminieren schwach dominierter Strategien lösbar.*
- *Die Auktion endet sofort (Preis 0) mit der effizienten Allokation.*
- *Die Strategie: "ich biete nur auf die Menge, die ich im Gleichgewicht erhalte und verteidige diese bis zu meiner maximalen Zahlungsbereitschaft" stützt dieses Ergebnis*
- *und dieses Strategien sind teilspielperfekt.*

Spieltheoretische Analyse

- Auktionen sind Spiele
- Die Spieltheorie entwickelt Lösungskonzepte für solche Spiele
- Hier: Eliminierung schwach dominierter Strategien
- bzw. teilspielperfektes Nashgleichgewicht (Selten)

Theorem

- *Deterministische Mehrstückauktionen sind durch Eliminieren schwach dominierter Strategien lösbar.*
- *Die Auktion endet sofort (Preis* 0*) mit der effizienten Allokation.*
- *Die Strategie: "ich biete nur auf die Menge, die ich im Gleichgewicht erhalte und verteidige diese bis zu meiner maximalen Zahlungsbereitschaft" stützt dieses Ergebnis*
- *und dieses Strategien sind teilspielperfekt.*

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
  bilde Scheiben nach Risikoklassen
  und verkaufe in Scheibletten ("Verbriefung", "Securitization")
  + Derivate auf diese Scheibletten ("Kreditderivate", "CDS")

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
- bilde Scheiben nach Risikoklassen

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
- bilde Scheiben nach Risikoklassen
- und verkaufe in Scheibletten ("Verbriefung", "Securitization")
- + Derivate auf diese Scheibletten ("Kreditderivate", "CDS")

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
- bilde Scheiben nach Risikoklassen
- und verkaufe in Scheibletten ("Verbriefung", "Securitization")
- + Derivate auf diese Scheibletten ("Kreditderivate", "CDS")

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
- bilde Scheiben nach Risikoklassen
- und verkaufe in Scheibletten ("Verbriefung", "Securitization")
- + Derivate auf diese Scheibletten ("Kreditderivate", "CDS")

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
- bilde Scheiben nach Risikoklassen
- und verkaufe in Scheibletten ("Verbriefung", "Securitization")
- + Derivate auf diese Scheibletten ("Kreditderivate", "CDS")

Bemerkungen zur Finanzkrise

Unvollständige Märkte

- Bei unvorhersehbaren Sprüngen (Kreditausfall!) gilt die Theorie aus dem ersten Teil nur eingeschränkt
- Vollkommene Absicherung unmöglich

Antwort: Versicherungsmathematik der 3. Art

- bündle viele kleine Kredite zu einem großen Paket
- bilde Scheiben nach Risikoklassen
- und verkaufe in Scheibletten ("Verbriefung", "Securitization")
- + Derivate auf diese Scheibletten ("Kreditderivate", "CDS")

Bemerkungen zur Finanzkrise

Die große Illusion

- Das Risiko ist weg!
- Anreiz zu Spekulation:
  - Hebeln
  - Versicherungen (ver)kaufen, deren Risiko man [illegible]
  - vereinfachte Kreditvergabe

Bemerkungen zur Finanzkrise

Die große Illusion

- Das Risiko ist weg!
- Anreiz zu Spekulation:
    - Hebeln
    - Versicherungen (ver)kaufen, deren Risiko man nicht hat
    - vereinfachte Kreditvergabe

Bemerkungen zur Finanzkrise

Die große Illusion

- Das Risiko ist weg!
- Anreiz zu Spekulation:
  - Hebeln
  - Versicherungen (ver)kaufen, deren Risiko man nicht hat
  - vereinfachte Kreditvergabe

Bemerkungen zur Finanzkrise

Die große Illusion

- Das Risiko ist weg!
- Anreiz zu Spekulation:
  - Hebeln
  - Versicherungen (ver)kaufen, deren Risiko man nicht hat
  - vereinfachte Kreditvergabe

Bemerkungen zur Finanzkrise

Die große Illusion

- Das Risiko ist weg!
- Anreiz zu Spekulation:
  - Hebeln
  - Versicherungen (ver)kaufen, deren Risiko man nicht hat
  - vereinfachte Kreditvergabe

Bemerkungen zur Finanzkrise

Die große Illusion

- Das Risiko ist weg!
- Anreiz zu Spekulation:
  - Hebeln
  - Versicherungen (ver)kaufen, deren Risiko man nicht hat
  - vereinfachte Kreditvergabe

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
    - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
    sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
    "AAA" ist keine Naturkonstante
    Ratings sind nicht objektiv
    Ratingbasierte Modelle daher anfällig
    Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Risikomanagement und Modellrisiko

Modelle

- sind nie perfekte Beschreibungen der Wirklichkeit
- in "normalen" Zeiten und bei "normalen" Derivaten hinreichend gut
- bei Krediten: hohes Modellrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeiten, Intensitäten schwer zu schätzen
  - sehr seltene Ereignisse, Datenmangel
  - "AAA" ist keine Naturkonstante
  - Ratings sind nicht objektiv
  - Ratingbasierte Modelle daher anfällig
  - Ratings sind manipulierbar (Spieltheorie!)

Die Regulierungskatastrophe und Value–at–Risk

Basel II

- Eigenkapitalvorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht
- "Bei konsequenter Umsetzung ... von Basel II ist ... eine Bankenkrise ... weitgehend ausgeschlossen."
- Value–at–Risk soll benutzt werden, um Markt– und operationelle Risiken zu bewerten
- $$\text{Eigenmittel} \geq 8\% \cdot [\text{Aktiva} + 12.5 \cdot \text{Value–at–Risk}]$$
- Risikoquantifizierung in Euro bzw. Dollar

Die Regulierungskatastrophe und Value–at–Risk

Basel II

- Eigenkapitalvorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht
- "Bei konsequenter Umsetzung ... von Basel II ist ... eine Bankenkrise ... weitgehend ausgeschlossen."
- Value–at–Risk soll benutzt werden, um Markt– und operationelle Risiken zu bewerten
- $$\text{Eigenmittel} \geq 8\% \cdot [\text{Aktiva} + 12.5 \cdot \text{Value–at–Risk}]$$
- Risikoquantifizierung in Euro bzw. Dollar

Die Regulierungskatastrophe und Value–at–Risk

Basel II

- Eigenkapitalvorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht
- "Bei konsequenter Umsetzung ... von Basel II ist ... eine Bankenkrise ... weitgehend ausgeschlossen."
- Value–at–Risk soll benutzt werden, um Markt– und operationelle Risiken zu bewerten
- $$\text{Eigenmittel} \geq 8\% \cdot [\text{Aktiva} + 12.5 \cdot \text{Value–at–Risk}]$$
- Risikoquantifizierung in Euro bzw. Dollar

Die Regulierungskatastrophe und Value–at–Risk

Basel II

- Eigenkapitalvorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht
- "Bei konsequenter Umsetzung ... von Basel II ist ... eine Bankenkrise ... weitgehend ausgeschlossen."
- Value–at–Risk soll benutzt werden, um Markt– und operationelle Risiken zu bewerten
- $$\text{Eigenmittel} \geq 8\% \cdot [\text{Aktiva} + 12.5 \cdot \text{Value–at–Risk}]$$
- Risikoquantifizierung in Euro bzw. Dollar

Die Regulierungskatastrophe und Value–at–Risk

Basel II

- Eigenkapitalvorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht
- "Bei konsequenter Umsetzung ... von Basel II ist ... eine Bankenkrise ... weitgehend ausgeschlossen."
- Value–at–Risk soll benutzt werden, um Markt– und operationelle Risiken zu bewerten
- $$\text{Eigenmittel} \geq 8\% \cdot [\text{Aktiva} + 12.5 \cdot \text{Value–at–Risk}]$$
- Risikoquantifizierung in Euro bzw. Dollar

Die Regulierungskatastrophe und Value–at–Risk

Basel II

- Eigenkapitalvorschriften des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht
- "Bei konsequenter Umsetzung ... von Basel II ist ... eine Bankenkrise ... weitgehend ausgeschlossen."
- Value–at–Risk soll benutzt werden, um Markt– und operationelle Risiken zu bewerten
- $$\text{Eigenmittel} \geq 8\% \cdot [\text{Aktiva} + 12.5 \cdot \text{Value–at–Risk}]$$
- Risikoquantifizierung in Euro bzw. Dollar

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Value–at–Risk ist kein gutes Maß!

Value–at–Risk ist ein Quantil

- wähle eine kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%, 1\%, 0.01\%$
- V@R ist 10 Mio, wenn die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Mio zu verlieren, gleich α ist
- $P[-X \geq V@R_\alpha(X)] = \alpha$

Probleme

- Statistik: P schwer zu bestimmen
- V@R kann ausgetrickst werden
- V@R sieht gewisse Risiken nicht
- V@R bestraft Diversifikation

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$

  für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$
- oder

$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \text{strafe}(Q)$$

- Die Theorie hierzu existiert!

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$

  für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$
- oder

$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \text{strafe}(Q)$$

- Die Theorie hierzu existiert!

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$

für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$

- oder

$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \text{strafe}(Q)$$

- Die Theorie hierzu existiert!

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$

  für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$
- oder

$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \text{strafe}(Q)$$

- Die Theorie hierzu existiert!

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$

  für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$
- oder

$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \mathrm{strafe}(Q)$$

- Die Theorie hierzu existiert!

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$

  für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$
- oder

$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \text{strafe}(Q)$$

- Die Theorie hierzu existiert!

Gute Risikomessung

Robuste Modelle

- Wir arbeiten mit einem "Modell" P
- erwarteter Verlust: $E^P(-X)$
- Absicherung: wir sollten lieber noch eine Reihe anderer W–maße Q in Betracht ziehen
- Risiko:
$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{P}} E^Q(-X)$$
für eine Klasse von Maßen $\mathscr{P}$
- oder
$$\rho(X) = \max_{Q} E^Q(-X) + \text{strafe}(Q)$$
- Die Theorie hierzu existiert!

Zurück ins Mittelalter?

- Die mathematische Theorie der Finanzmärkte liefert wertvolle Einsichten in die Natur von Risiken
- Volkswirtschaftlicher Nutzen
- Bessere Abschätzung der Risiken notwendig
- Durchsetzung vermutlich durch eine unabhängige Agentur notwendig
- last not least: Spiel– und Finanzmarkttheorie müssen zusammenkommen

Zurück ins Mittelalter?

- Die mathematische Theorie der Finanzmärkte liefert wertvolle Einsichten in die Natur von Risiken
- Volkswirtschaftlicher Nutzen
- Bessere Abschätzung der Risiken notwendig
- Durchsetzung vermutlich durch eine unabhängige Agentur notwendig
- last not least: Spiel– und Finanzmarkttheorie müssen zusammenkommen

Zurück ins Mittelalter?

- Die mathematische Theorie der Finanzmärkte liefert wertvolle Einsichten in die Natur von Risiken
- Volkswirtschaftlicher Nutzen
- Bessere Abschätzung der Risiken notwendig
- Durchsetzung vermutlich durch eine unabhängige Agentur notwendig
- last not least: Spiel– und Finanzmarkttheorie müssen zusammenkommen

Zurück ins Mittelalter?

- Die mathematische Theorie der Finanzmärkte liefert wertvolle Einsichten in die Natur von Risiken
- Volkswirtschaftlicher Nutzen
- Bessere Abschätzung der Risiken notwendig
- Durchsetzung vermutlich durch eine unabhängige Agentur notwendig
- last not least: Spiel– und Finanzmarkttheorie müssen zusammenkommen

Zurück ins Mittelalter?

- Die mathematische Theorie der Finanzmärkte liefert wertvolle Einsichten in die Natur von Risiken
- Volkswirtschaftlicher Nutzen
- Bessere Abschätzung der Risiken notwendig
- Durchsetzung vermutlich durch eine unabhängige Agentur notwendig
- last not least: Spiel– und Finanzmarkttheorie müssen zusammenkommen