Übungsblatt 5
zur Vorlesung Prinzipien der Spektroskopie

Besprechung am 29.11.2019

Aufgabe 1: Teilchen im Kasten

Die Schrödinger-Gleichung (SGL) lautet:

$$\hat{H}\psi = E \cdot \psi \tag{1}$$

$\hat{H}$ ist der Hamilton-Operator in kartesischen Koordinaten für den 1-dimensionalen Fall:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2}$$

Ein allgemeiner Lösungsansatz für die SGL lautet:

$$\psi = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} \tag{3}$$

Gegeben sei weiterhin das Kastenpotential $V(x)$ für einen 1-dimensionalen Kasten:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{oder} \quad x > L \end{cases} \tag{4}$$

(a) Zeige das (3) eine Eigenfunktion von (2) ist. Wie groß ist der Energie-Eigenwert für ein freies Teilchen im 1-dimensionalen Raum?

(b) Welche Werte muss die Wellenfunktion ψ bei den Koordinaten 0 und L im 1-dimensionalen Kasten mit den Wänden $V(x)$ haben?

(c) Zeige ausgehend von der allgemeinen Lösung (3) das die Wellenfunktion ψ für ein Teilchen im 1-dimensionalen Kasten der Länge L lautet:

$$\psi_n = \beta \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L} \cdot n\right) \tag{5}$$

Tipp: Informiere Dich über die Eulersche Formel...

(d) Weiterhin muss die Wellenfunktion folgendermaßen auf 1 normiert sein (Warum?):

$$\int_0^L \psi_n^\star \cdot \psi_n = 1 \tag{6}$$

Bestimme die Normierungskonstante β um die vollständige Wellenfunktion für das Teilchen im 1-dimensionalen Kasten zu erhalten!

(e) Zeige das die Funktion

$$\psi_n = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L} \cdot n\right) \tag{7}$$

eine Eigenfunktion von (2) ist und bestimme die Energieeigenwerte! Erkläre, was diese bedeuten und skizziere sie für $n = 0..4$. Skizziere ebenfalls die dazugehörigen Wellenfunktionen und erkläre, was diese nach der Interpretation von Born bedeuten.

Aufgabe 2: Tunneleffekt I – Teilchen in einer Potentialmulde

In diesem Beispiel soll sich das Teilchen in einer Potentialmulde befinden, für die gilt:

Bereich I:	für	$x < 0$	ist	$V = V_0 \neq \infty$
Bereich II:	für	$0 < x < a$	ist	$V = 0$
Bereich III:	für	$x > a$	ist	$V = V_0 \neq \infty$

Im Unterschied zum „Teilchen im Kasten“, wo $V_0 = \infty$, kann unser Teilchen hierbei auch in das Randpotential V_0 eindringen, obwohl seine Energie $E < V_0$.

(a) Löse die Schrödingergleichung und berechne die Wellenfunktion für das Teilchen in den drei Bereichen.

(b) Skizziere die Potentialmulde und zeichne die Wellenfunktion(en) des Teilchens ein. Trage zum Vergleich die Wellenfunktionen eines „Teilchens im Kasten“ ($V_0 = \infty$) ein. Worin unterscheiden sich diese Wellenfunktionen?