

**Übungsblatt 3**  
**zur Vorlesung Prinzipien der Spektroskopie**  
Besprechung am 8. November 2019

**Aufgabe 1: Schwarzkörperstrahlung I**

$$\rho_\lambda(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1} d\lambda \quad (1)$$

$$\rho_\nu(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass Gleichungen (1) und (2) äquivalent sind.

**Aufgabe 2: Schwarzkörperstrahlung II**

Angenommen, dass ein Widerstandsheizter mit einer Oberfläche von  $10 \text{ cm}^2$  sich wie ein schwarzer Strahler verhält:

- (a) Kalkuliere die benötigte Leistung, um seine Temperatur auf  $900 \text{ }^\circ\text{C}$  zu halten, wenn Kontakt- und Konvektions-Wärmetransfer vernachlässigbar sind.
- (b) Wie groß ist der Energieverlust durch Strahlung während einer Stunde bei  $900 \text{ }^\circ\text{C}$ ?
- (c) In welcher spektralen Region ist die intensivste Strahlung emittiert worden?
- (d) Bei welcher Temperatur zeigt der Heizer eine maximale Rotlicht-Emission ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ )?

**Aufgabe 3: Schwarzkörperstrahlung III**

Bei genügend hoher Temperatur emittiert jeder Stoff ein kontinuierliches Lichtspektrum, das sogenannte Glühemissionsspektrum. Obwohl die Existenz dieses kontinuierlichen Spektrums schon lange bekannt war, und es klassisch mit Mitteln der statistischen Mechanik/Thermodynamik beschrieben werden kann, gelang es erst *Planck* die spektrale Verteilung des Glühemissionsspektrums befriedigend zu beschreiben. Er fand für die Energieverteilung  $\rho(\lambda, T)$  das folgende, nach ihm benannte Gesetz:

$$\rho_\lambda(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1} d\lambda \quad (3)$$

- (a) Mit Hilfes des Rayleigh-Jeans Gesetzes kann die Schwarzkörperstrahlung für große Wellenlängen hinreichend gut beschrieben werden:

$$\rho_\lambda(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \quad (4)$$

Wie kann aus Gleichung (3) dieses Gesetz hergeleitet werden? Woran wurde schon früh erkannt, daß das Rayleigh-Jeans Gesetz nur eine Näherung ist und nicht für das gesamte Spektrum gelten kann?

- (b) Die Gesamtemission  $U$  eines Schwarzkörperstrahlers folgt aus der Integration der Strahlungsdichte  $\rho$  über alle Wellenlängen  $\lambda$ :

$$U = \int_0^{\infty} \rho(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (5)$$

Diese Beziehung ist als Stefan-Boltzmann-Gesetz bekannt. Leite dieses aus Gleichung (3) her!

**Hinweis:**

Um das Integral analytisch (per Hand) zu lösen, seien folgende Begriffe hilfreich: Geometrische Reihe, Gamma-Funktion, Riemansche Zetafunktion. Alternativ kann das Integral  $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$  nachgeschlagen werden.

**Aufgabe 4: Teilchennatur des Lichts**

Das von einem He-Ne-Lasers mit einer Leistung von 5 mW emittierte Licht hat die Wellenlänge  $\lambda = 632$  nm. Der Laserstrahl hat ein Durchmesser von 1 mm. Berechne die Dichte an Photonen im Strahl.